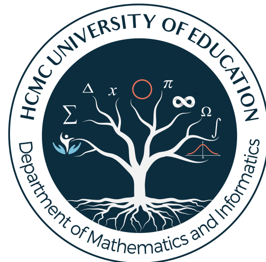
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM TP.HCM
KHOA TOÁN - TIN HỌC



BÀI GIẢNG
GIẢI TÍCH HÀM NHIỀU BIẾN

(Tài liệu dành cho sinh viên Khoa Toán - Tin học)

Nguyễn Thành Nhân

Thành Phố Hồ Chí Minh, Năm 2023

Mục lục

Giới thiệu môn học

Học phần *Giải tích hàm nhiều biến* là một trong những học phần bắt buộc trong hầu hết các chương trình đào tạo cử nhân Toán, dành cho sinh viên đã học xong các học phần *Đại số tuyến tính* và *Giải tích hàm một biến*. Nội dung của học phần là sự nối tiếp các kiến thức sinh viên đã được hướng dẫn trong học phần *Giải tích hàm một biến*, với mục tiêu cho sinh viên ngành Toán tiếp cận một số kiến thức nền tảng về phép tính vi phân và phép tính tích phân cho các hàm nhiều biến.

Trong quá trình xây dựng và chứng minh các kết quả đối với hàm nhiều biến, một số kết quả quen thuộc trong giải tích hàm một biến sẽ được kế thừa và áp dụng thường xuyên. Do đó, để học tốt học phần này, sinh viên cần nắm vững các kiến thức về giải tích hàm một biến, bao gồm: các phương pháp tính giới hạn dãy số, giới hạn hàm số một biến, khảo sát tính liên tục và sự khả vi của hàm một biến, các định lý giá trị trung bình (Định lý Lagrange), công thức khai triển Taylor, phương pháp tìm cực trị của hàm một biến, định nghĩa tích phân Riemann cho hàm một biến và các phương pháp tính tích phân của hàm một biến.

Nội dung bài giảng này được thiết kế dành cho sinh viên Khoa Toán - Tin học, bao gồm 7 chương.

- Chương 1 giới thiệu một số định nghĩa cơ bản trong không gian $\mathbb{R}^n$ bao gồm chuẩn, tích vô hướng và một số khái niệm tôpô cơ bản trong $\mathbb{R}^n$. Bên cạnh đó, chương này còn trình bày định nghĩa về sự hội tụ trong không gian $\mathbb{R}^n$, làm cơ sở cho các kiến thức về giới hạn và sự khả vi cho hàm nhiều biến ở các chương sau.
- Chương 2 định nghĩa về giới hạn và tính liên tục của hàm nhiều biến. Trọng tâm của chương này hướng đến các phương pháp để tính giới hạn bằng cách sử dụng định lý giới hạn qua dãy và nguyên lý kẹp, từ đó khảo sát sự liên tục của hàm nhiều biến. Các phương pháp này sẽ

được vận dụng liên tục ở chương tiếp theo trong việc khảo sát sự khả vi của hàm nhiều biến.

- Chương 3 đưa ra các kiến thức cơ bản về phép tính vi phân của hàm nhiều biến, bao gồm các khái niệm về đạo hàm riêng, sự khả vi và các định lý liên quan. Trọng tâm của chương này là định nghĩa về sự khả vi và một số kết quả lý thuyết liên quan đến sự khả vi của hàm nhiều biến. Các định lý ở chương này được chứng minh một cách chi tiết, với mục tiêu mang đến cho sinh viên ý tưởng cơ bản trong việc chuyển từ lý thuyết phép tính vi phân cho hàm một biến sang phép tính vi phân cho hàm nhiều biến.

- Chương 4 trình bày một ứng dụng của lý thuyết về phép tính vi phân cho hàm nhiều biến trong việc giải các bài toán cực trị. Trọng tâm của chương này là phương pháp khảo sát cực trị địa phương không điều kiện và cực trị địa phương có điều kiện cho hàm nhiều biến, từ đó ứng dụng để giải quyết bài toán cực trị toàn cục.

- Chương 5 trình bày định nghĩa tích phân Riemann của hàm nhiều biến trên miền bị chặn, cùng với phương pháp tính tích phân và phép đổi biến trong trường hợp tổng quát. Trọng tâm của chương này là các phương pháp đổi biến thông dụng trong việc tính tích phân bội, đặc biệt là các phương pháp đổi biến thông dụng trong tọa độ cực, tọa độ trụ và tọa độ cầu.

- Hai chương cuối cùng của bài giảng trình bày các khái niệm tích phân mới ứng với hàm nhiều biến, lần lượt là tích phân đường và tích phân mặt. Hai khái niệm tích phân này được phân thành hai loại, tương ứng với tích phân của hàm vô hướng (hàm có giá trị thực) và hàm có hướng (hàm có giá trị vector). Trọng tâm ở hai chương này là các phương pháp tính tích phân đặc biệt, sử dụng định lý Green, Định lý Gauss-Ostrogradski và định lý Stokes.

Bài giảng này là tài liệu tham khảo chính cho các sinh viên tham gia học phần *Giải tích hàm nhiều biến* năm học 2022 - 2023. Bên cạnh bài giảng này, sinh viên có thể lựa chọn tham khảo thêm một hoặc một vài tài liệu được giới thiệu trong phần tài liệu tham khảo. Bài giảng và bài tập sẽ được cập nhật ở mục "Teaching/Analysis of functions of several variables" trên website:

https://sites.google.com/site/nguyenthnhan/teaching.

Chương 1

Các khái niệm cơ bản trong không gian $\mathbb{R}^n$

1.1 Không gian định chuẩn $\mathbb{R}^n$

1.1.1 Không gian vector $\mathbb{R}^n$

Cho số tự nhiên $n \geq 1$, ta định nghĩa:

$$\mathbb{R}^n := \{x = (x_1, x_2, ..., x_n) : \ x_i \in \mathbb{R}, \ i = 1, 2, ..., n\}.$$

Trên tập hợp $\mathbb{R}^n$, ta xét hai phép toán gồm phép toán cộng (+) giữa hai phần tử và phép toán nhân (.) giữa một số thực với một phần tử trong $\mathbb{R}^n$. Hai phép toán này được định nghĩa như sau:

$$\begin{aligned} x + y &:= (x_1 + y_1, x_2 + y_2, ..., x_n + y_n), \\ \alpha.x &:= (\alpha x_1, \alpha x_2, ..., \alpha x_n), \end{aligned}$$

với mọi $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, $y = (y_1, y_2, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n$ và $\alpha \in \mathbb{R}$. Khi đó $(\mathbb{R}^n, +, .)$ thỏa mãn 8 tính chất trong định nghĩa của không gian vector. Cụ thể, với mọi $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ và $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, ta có:

i) Phép cộng giao hoán: $x + y = y + x$.

ii) Phép cộng kết hợp: $(x + y) + z = x + (y + z)$.

iii) Phép cộng có đơn vị: với $0_{\mathbb{R}^n} = (0, 0, ..., 0) \in \mathbb{R}^n$ ta có $x + 0_{\mathbb{R}^n} = 0_{\mathbb{R}^n} + x$.

iv) Phép cộng có phần tử đối: tồn tại $(-x) \in \mathbb{R}^n$ sao cho $x + (-x) = 0_{\mathbb{R}^n}$.

v) Phép nhân kết hợp: $\alpha.(\beta.x) = (\alpha\beta).x$.

vi) Phép nhân phân phối với phép cộng: $\alpha.(x + y) = \alpha.x + \alpha.y$.

vii) Phép nhân phân phối với phép cộng vô hướng: $(\alpha + \beta).x = \alpha.x + \beta.x$.

viii) Phép nhân có đơn vị: $1.x = x$.

Một cách đơn giản, ta nói $\mathbb{R}^n$ là một không gian vector và mỗi điểm trong $\mathbb{R}^n$ được gọi là một vector. Lưu ý rằng trong trường hợp không có sự nhầm lẫn trong phép nhân, ta thường viết αx thay vì $\alpha.x$.

Hơn nữa, ta biết rằng $\mathbb{R}^n$ còn là một không gian vector hữu hạn chiều, với cơ sở chính tắc gồm n vector đơn vị dưới đây

$$e_1 = (1, 0, 0, ..., 0),\ e_2 = (0, 1, 0, ..., 0),\ ...,\ e_n = (0, 0, ..., 0, 1).$$

1.1.2 Tích vô hướng và chuẩn Euclid

Định nghĩa 1.1.1 (Tích vô hướng)**.** *Cho $x, y \in \mathbb{R}^n$, với $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$. Tích vô hướng của hai vector x và y, ký hiệu là $\langle x, y\rangle$, là một số thực được xác định như sau:*

$$\langle x, y\rangle := x_1y_1 + x_2y_2 + ... + x_ny_n.$$

Trong một số trường hợp, người ta có thể viết tích vô hướng của hai vector x và y là xy thay vì $\langle x, y\rangle$, nếu không mang đến sự nhầm lẫn.

Tính chất 1.1.2. *Với mọi $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ và $\alpha \in \mathbb{R}$, ta có các tính chất sau:*

i) $\langle x, x\rangle \geq 0$. *Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi* $x = 0_{\mathbb{R}^n}$.

ii) $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$.

iii) $\langle \alpha x, y\rangle = \alpha\langle x, y\rangle$.

iv) $\langle x, y + z\rangle = \langle x, y\rangle + \langle x, z\rangle$.

Chứng minh. Các tính chất này được kiểm tra trực tiếp từ định nghĩa của tích vô hướng. □

Định nghĩa 1.1.3 (Chuẩn Euclid)**.** *Chuẩn Euclid của vector $x \in \mathbb{R}^n$, ký hiệu là $\|x\|$, là một số thực xác định như sau:*

$$\|x\| := \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2}, \quad x = (x_1, x_2, ..., x_n).$$

Chú ý 1.1.4. Ở đây, ta để ý rằng $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$.

Định lý 1.1.5 (Bất đẳng thức Schwarz)**.** *Bất đẳng thức sau luôn đúng*

$$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\|y\|, \tag{1.1}$$

với mọi $x, y \in \mathbb{R}^n$.

Chứng minh. Trong trường hợp $x = 0_{\mathbb{R}^n}$, bất đẳng thức (1.1) hiển nhiên đúng. Với mọi $x \neq 0_{\mathbb{R}^n}$ và $t \in \mathbb{R}$, ta luôn có:

$$\langle tx + y, tx + y \rangle \geq 0. \tag{1.2}$$

Sử dụng *ii*), *iii*) và *iv*) trong Tính chất 1.1.2, ta có thể khai triển

$$\begin{aligned} \langle tx + y, tx + y \rangle &= \langle tx, tx \rangle + \langle tx, y \rangle + \langle y, tx \rangle + \langle y, y \rangle \\ &= \|x\|^2 t^2 + 2t\langle x, y \rangle + \|y\|^2. \end{aligned} \tag{1.3}$$

Từ đó, bất đẳng thức (1.2) được viết lại dưới dạng

$$\|x\|^2 t^2 + 2t\langle x, y \rangle + \|y\|^2 \geq 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Đây là tam thức bậc hai theo t và chỉ nhận giá trị không âm trên $\mathbb{R}$ nên có đại lượng

$$\Delta' = (\langle x, y \rangle)^2 - \|x\|^2 \|y\|^2 \leq 0.$$

Điều này dẫn đến bất đẳng thức cần chứng minh. □

Chú ý 1.1.6. Bất đẳng thức (1.1) có dạng tương đương

$$|x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n| \leq \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2} \sqrt{y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2}.$$

Đây là dạng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz được sử dụng khá phổ biến trong toán học ở bậc phổ thông. Có khá nhiều phương pháp sơ cấp để chứng minh bất đẳng thức này. Chứng minh ở trên trình bày một trong những ý tưởng gọn gàng và đơn giản nhất.

Tính chất 1.1.7. *Với mọi $x, y \in \mathbb{R}^n$ và $\alpha \in \mathbb{R}$, ta có các tính chất sau:*

i) $\|x\| \geq 0$. *Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi* $x = 0_{\mathbb{R}^n}$.

ii) $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$.

iii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ *(bất đẳng thức tam giác).*

Chứng minh. Hai tính chất *i*) và *ii*) là hiển nhiên theo định nghĩa của chuẩn Euclid. Áp dụng khai triển trong (1.3) với $t = 1$, ta được

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 &= \|x\|^2 + 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2 \\ &= (\|x\| + \|y\|)^2 + 2\left(\langle x, y \rangle - \|x\| \|y\|\right), \end{aligned}$$

ta thấy rằng tính chất *iii*) là hệ quả của bất đẳng thức Schwarz trong Định lý 1.1.5. □

Hệ quả 1.1.8. *Với mọi $x, y \in \mathbb{R}^n$, ta có:*

$$\big| \|x\| - \|y\| \big| \leq \|x - y\|. \tag{1.4}$$

Hơn nữa, nếu $\langle x, y \rangle = 0$ thì

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 \quad \textit{(công thức Pythagoras).}$$

Chứng minh. Áp dụng bất đẳng thức tam giác trong Tính chất 1.1.7, ta thu được hai bất đẳng thức sau

$$\begin{aligned} \|x\| &= \|y + x - y\| \leq \|y\| + \|x - y\|, \\ \|y\| &= \|x + y - x\| \leq \|x\| + \|y - x\|. \end{aligned}$$

Từ đây ta suy ra (1.4) với lưu ý rằng $\|x - y\| = \|y - x\|$. □

Không gian vector $\mathbb{R}^n$ đã được trang bị chuẩn Euclid $\|\cdot\|$, người ta gọi $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ là không gian định chuẩn.

Định nghĩa 1.1.9 (Khoảng cách)**.** *Ta định nghĩa khoảng cách giữa hai vector $x, y \in \mathbb{R}^n$ là một số thực xác định bởi*

$$d(x, y) := \|x - y\|.$$

Tính chất 1.1.10. *Khoảng cách d trong Định nghĩa 1.1.9 thỏa mãn các tính chất sau: với mọi $x, y, z \in \mathbb{R}^n$, ta có*

i) $d(x, y) \geq 0$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y$.

ii) $d(x, y) = d(y, x)$.

iii) $d(x, z) \leq d(x, z) + d(y, z)$ (bất đẳng thức tam giác).

Chứng minh. Các tính chất này được suy ra trực tiếp từ định nghĩa của metric d và Tính chất 1.1.7. □

Người ta còn gọi ánh xạ d là một metric trên $\mathbb{R}^n$ và gọi $(\mathbb{R}^n, d)$ là không gian metric.

Chú ý 1.1.11. Các khái niệm liên quan đến không gian metric và không gian định chuẩn sẽ được giới thiệu một cách tổng quát và chi tiết trong các học phần tiếp theo thuộc chuyên ngành giải tích. Trong học phần này, ta chỉ xét các trường hợp đặc biệt trong không gian $\mathbb{R}^n$.

1.1.3 Ánh xạ tuyến tính từ $\mathbb{R}^n$ vào $\mathbb{R}$

Định nghĩa 1.1.12 (Ánh xạ tuyến tính). *Ánh xạ $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ được gọi là ánh xạ tuyến tính nếu A thỏa mãn hai tính chất sau:*

i) $A(x + y) = A(x) + A(y)$,

ii) $A(\alpha x) = \alpha A(x)$,

với mọi $x, y \in \mathbb{R}^n$ và $\alpha \in \mathbb{R}$. Ngoài ra, tập hợp tất cả các ánh xạ tuyến tính từ $\mathbb{R}^n$ vào $\mathbb{R}$ được ký hiệu là $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$.

Chú ý 1.1.13. Hai tính chất trong định nghĩa trên có thể viết lại một cách tương đương dưới dạng:

$$A(\alpha x + \beta y) = \alpha A(x) + \beta A(y),$$

với mọi $x, y \in \mathbb{R}^n$ và $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Giả sử $e_1 = (1, 0, ..., 0), e_2 = (0, 1, ..., 0), ..., e_n = (0, 0, ..., 1)$ là các vector đơn vị trong cơ sở chính tắc của không gian vector $\mathbb{R}^n$. Khi đó, với mọi $x \in \mathbb{R}^n$, $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, ta có thể biểu diễn vector x dưới dạng

$$x = x_1e_1 + x_2e_2 + ... + x_ne_n.$$

Nếu $A \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ thì ta thu được

$$A(x) = x_1A(e_1) + x_2A(e_2) + ... + x_nA(e_n).$$

Xét vector $a = (a_1, a_2, ..., a_n)$, trong đó $a_i = A(e_i)$, $\forall i = 1, 2, ..., n$. Ta có thể viết lại:

$$A(x) = a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n = \langle a, x\rangle.$$

Theo mô tả trên đây, ta thấy rằng: với mỗi ánh xạ tuyến tính $A \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, tồn tại duy nhất một vector $a \in \mathbb{R}^n$ sao cho

$$A(x) = \langle a, x\rangle, \quad x \in \mathbb{R}^n. \tag{1.5}$$

Ngược lại, mỗi vector $a \in \mathbb{R}^n$ sẽ xác định duy nhất một ánh xạ tuyến tính $A \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ thỏa mãn (1.5). Khi đó, vector a được gọi là vector đại diện của ánh xạ tuyến tính A. Người ta thường đồng nhất mỗi ánh xạ tuyến tính $A \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ với vector đại diện của nó.

1.2 Một số khái niệm tôpô cơ bản trong $\mathbb{R}^n$

1.2.1 Quả cầu mở, quả cầu đóng

Định nghĩa 1.2.1 (Quả cầu). *Cho $x_0 \in \mathbb{R}^n$ và $r > 0$, ta định nghĩa:*

- *Quả cầu mở tâm x_0 bán kính r trong không gian $\mathbb{R}^n$ là tập hợp được xác định bởi:*

$$B(x_0, r) := \{x \in \mathbb{R}^n : \ \|x - x_0\| < r\}.$$

- *Quả cầu đóng tâm x_0 bán kính r trong không gian $\mathbb{R}^n$ là tập hợp được xác định bởi:*

$$B'(x_0, r) := \{x \in \mathbb{R}^n : \ \|x - x_0\| \leq r\}.$$

- *Mặt cầu tâm x_0 bán kính r trong không gian $\mathbb{R}^n$ là tập hợp được xác định bởi:*

$$S(x_0, r) := \{x \in \mathbb{R}^n : \ \|x - x_0\| = r\}.$$

Ví dụ 1.2.2. Ta ví dụ một số trường hợp đặc biệt sau đây.

- Trong $\mathbb{R}$, khoảng mở (a, b) bất kỳ là một quả cầu mở tâm $x_0 = \dfrac{a+b}{2}$ và bán kính $r = \dfrac{b-a}{2}$.
- Trong $\mathbb{R}^2$, quả cầu mở là các hình tròn không lấy biên (không lấy đường tròn).

1.2.2 Tập mở, tập đóng

Định nghĩa 1.2.3 (Tập mở). *Tập hợp $X \subset \mathbb{R}^n$ được gọi là tập mở trong $\mathbb{R}^n$ nếu với mọi x thuộc X, tồn tại một quả cầu mở tâm x chứa trong X, tức là:*

$$\forall x \in X, \ \exists r > 0 : \ B(x, r) \subset X. \tag{1.6}$$

Để đơn giản, khi X là một tập mở trong $\mathbb{R}^n$, ta thường gọi tắt X là tập mở, hoặc X mở. Theo định nghĩa này, để chứng minh một tập hợp là tập

mở trong $\mathbb{R}^n$, ta sẽ chỉ ra rằng tập hợp đó thỏa mãn mệnh đề (1.6).

Trong một số trường hợp, việc suy luận trở nên dễ dàng hơn khi sử dụng mệnh đề phủ định. Ta có thể phát biểu mệnh đề phủ định của mệnh đề (1.6) như sau. Tập X không phải là tập mở trong $\mathbb{R}^n$ nếu

$$\exists x \in X : \ \forall r > 0, \ B(x,r) \not\subset X. \tag{1.7}$$

Định lý 1.2.4. *Các khẳng định sau là đúng:*

i) Tập $\varnothing$ và $\mathbb{R}^n$ là hai tập mở trong $\mathbb{R}^n$.

ii) Quả cầu mở trong $\mathbb{R}^n$ là tập mở trong $\mathbb{R}^n$.

iii) Hợp của một họ bất kỳ các tập mở trong $\mathbb{R}^n$ là tập mở trong $\mathbb{R}^n$. Nghĩa là, nếu U_α là các tập mở trong $\mathbb{R}^n$ với mọi $\alpha \in I$ (I là một tập chỉ số nào đó, có thể đếm được hoặc không đếm được) thì $\cup_{\alpha\in I} U_\alpha$ cũng là một tập mở trong $\mathbb{R}^n$.

iv) Giao của một họ hữu hạn các tập mở trong $\mathbb{R}^n$ là tập mở trong $\mathbb{R}^n$. Nghĩa là, nếu V_1 và V_2 là hai tập mở thì $V_1 \cap V_2$ là tập mở trong $\mathbb{R}^n$.

Chứng minh. Khẳng định *i*) là hiển nhiên. Nói thêm rằng tập $\varnothing$ không chứa phần tử nào, do đó nó *không thỏa mãn* mệnh đề (1.7), là phủ định của mệnh đề (1.6). Nói cách khác, tập $\varnothing$ thỏa mãn mệnh đề (1.6).

Chứng minh *ii*), lấy $x_0 \in \mathbb{R}^n$ và $\delta \in \mathbb{R}^+$ tùy ý, ta sẽ chứng minh quả cầu mở $B(x_0,\delta)$ là tập mở, tức là $B(x_0,\delta)$ thỏa mãn mệnh đề (1.6). Thật vậy, với mọi $x \in B(x_0,\delta)$, ta có $\|x - x_0\| < \delta$. Đặt $r = \delta - \|x - x_0\| > 0$, với mọi $y \in B(x,r)$, ta có:

$$\|y - x_0\| \le \|y - x\| + \|x - x_0\| < r + \|x - x_0\| = \delta.$$

Điều này chứng tỏ $y \in B(x_0,\delta)$. Từ đó suy ra $B(x,r) \subset B(x_0,\delta)$. Như vậy, ta đã chứng minh được

$$\forall x \in B(x_0,\delta), \ \exists r = \delta - \|x - x_0\| > 0 : \ B(x,r) \subset B(x_0,\delta).$$

Chứng minh *iii*), giả sử $(U_\alpha)_{\alpha\in I}$ là họ bất kỳ các tập mở trong $\mathbb{R}^n$. Đặt $U = \cup_{\alpha\in I} U_\alpha$, ta chứng minh U là tập mở trong $\mathbb{R}^n$. Với mọi $x \in U$, tồn tại $\alpha_0 \in I$ sao cho $x \in U_{\alpha_0}$. Do U_{α_0} là tập mở nên tồn tại $r_0 > 0$ sao cho $B(x,r_0) \subset U_{\alpha_0}$. Mà $U_{\alpha_0} \subset U$ nên $B(x,r_0) \subset U$. Vậy U thỏa mãn mệnh đề (1.6) nên U là tập mở trong $\mathbb{R}^n$.

Chứng minh *iv*), giả sử V_1, V_2 là hai tập mở trong $\mathbb{R}^n$, ta chỉ cần chứng minh $V = V_1 \cap V_2$ là tập mở trong $\mathbb{R}^n$. Với mọi $x \in V$, ta có $x \in V_1 \cap V_2$. Do V_1, V_2 là các tập mở trong $\mathbb{R}^n$ nên tồn tại $r_1, r_2 > 0$ sao cho $B(x, r_1) \subset V_1$ và $B(x, r_2) \subset V_2$. Khi đó, với $r = \min\{r_1, r_2\} > 0$, ta thấy

$$B(x, r) \subset B(x, r_1) \cap B(x, r_2) \subset V_1 \cap V_2 = V.$$

Vậy V là tập mở trong $\mathbb{R}^n$. □

Định nghĩa 1.2.5 (Tập đóng). *Tập $Y \subset \mathbb{R}$ được gọi là tập đóng trong $\mathbb{R}^n$ nếu phần bù của nó (tức là tập hợp $\mathbb{R}^n \setminus Y$) là tập mở.*

Theo định nghĩa này, để chứng minh một tập hợp là tập đóng, ta sẽ kiểm tra phần bù của nó là tập mở, tức là chứng minh phần bù thỏa mãn mệnh đề (1.6).

Cần lưu ý rằng phủ định của tập mở không phải là tập đóng và ngược lại. Có những tập hợp vừa là tập mở, vừa là tập đóng. Đồng thời cũng có nhiều tập hợp không phải tập mở, cũng không phải tập đóng.

Định lý 1.2.6. *Các khẳng định sau là đúng.*

i) Tập $\varnothing$ và $\mathbb{R}^n$ là hai tập đóng trong $\mathbb{R}^n$.

ii) Quả cầu đóng trong $\mathbb{R}^n$ là tập đóng trong $\mathbb{R}^n$.

iii) Hợp của một họ hữu hạn các tập đóng trong $\mathbb{R}^n$ là tập đóng trong $\mathbb{R}^n$.

iv) Giao của một họ bất kỳ các tập đóng trong $\mathbb{R}^n$ là tập đóng trong $\mathbb{R}^n$.

Chứng minh. Định lý này được chứng minh như một hệ quả của Định lý 1.2.4, đồng thời kết hợp luật De Morgan dưới đây

$$\mathbb{R}^n \setminus (\cup_{\alpha \in I} V_\alpha) = \cap_{\alpha \in I} (\mathbb{R}^n \setminus V_\alpha),$$
$$\mathbb{R}^n \setminus (\cap_{\alpha \in I} V_\alpha) = \cup_{\alpha \in I} (\mathbb{R}^n \setminus V_\alpha).$$

□

Khi khảo sát tập hợp X không phải tập mở và không phải tập đóng trong $\mathbb{R}^n$, các tính chất của tập mở hoặc đóng không còn bảo đảm. Để thuận lợi hơn trong việc khảo sát, người ta xét các tập mở và tập đóng "gần" với X nhất. Các tập này được xem như phần trong và bao đóng của tập X.

Định nghĩa 1.2.7 (Phần trong, bao đóng, biên). *Cho $X \subset \mathbb{R}^n$, ta định nghĩa:*

i) Phần trong của X là tập mở lớn nhất chứa trong X, ký hiệu là $\overset{\circ}{X}$.

ii) Bao đóng của X là tập đóng nhỏ nhất chứa X, ký hiệu $\overline{X}$.

iii) Biên của X là hiệu giữa bao đóng và phần trong, ký hiệu ∂X.

Ví dụ 1.2.8. Xét tập $X = (0, 1]$ trong $\mathbb{R}$. Khi đó, ta có các nhận xét sau.

- Tập X không phải tập mở vì X thỏa mãn mệnh đề (1.7). Thật vậy, với $x = 1$ và với mọi $r > 0$, ta thấy $B(x, r) = (1 - r, 1 + r) \not\subset (0, 1] = X$.
- Tập X không phải tập đóng vì $\mathbb{R}^n \setminus X = (-\infty, 0] \cap (1, +\infty)$ không phải tập mở. Tương tự như trên, rõ ràng quả cầu $B(0, r) \not\subset X$ với mọi $r > 0$.
- Tập mở lớn nhất chứa trong X là $\overset{\circ}{X} = (0, 1)$. Thật vậy, ta biết $(0, 1)$ là một tập mở chứa trong X. Giả sử Y cũng là tập mở chứa trong $X = (0, 1]$, theo suy luận đầu tiên thì $x = 1 \notin Y$, do đó $Y \subset (0, 1)$.
- Tập đóng nhỏ nhất chứa X là $\overline{X} = [0, 1]$. Thật vậy, $[0, 1]$ là tập đóng chứa X. Giả sử Z cũng là tập đóng chứa X, ta chứng minh $[0, 1] \subset Z$, tức là $0 \in Z$. Suy luận bằng phản chứng, nếu $0 \notin Z$ thì $0 \in \mathbb{R}^n \setminus Z$. Mà $\mathbb{R}^n \setminus Z$ là tập mở nên tồn tại $r > 0$ sao cho
$$B(0, r) = (-r, r) \subset \mathbb{R}^n \setminus Z.$$
Tuy nhiên, vì $X \subset Z$ nên
$$\mathbb{R}^n \setminus Z \subset \mathbb{R}^n \setminus X = (-\infty, 0] \cap (1, +\infty).$$
Điều này dẫn đến
$$B(0, r) = (-r, r) \subset (-\infty, 0] \cap (1, +\infty), \quad \text{vô lý}.$$
- Biên của X là $\partial X = \overline{X} \setminus \overset{\circ}{X} = \{0, 1\}$.

Định nghĩa 1.2.9 (Điểm giới hạn, điểm cô lập). *Cho $X \subset \mathbb{R}^n$.*

i) $x \in \mathbb{R}^n$ được gọi là điểm giới hạn của X nếu với mọi $r > 0$, ta luôn có
$$B(x, r) \cap X \setminus \{x\} \neq \emptyset.$$

ii) $x \in X$ được gọi là điểm cô lập của X nếu tồn tại $r > 0$ sao cho

$$B(x, r) \cap X \setminus \{x\} = \emptyset.$$

Chú ý 1.2.10. Cho $X \subset \mathbb{R}^n$.

- Điểm giới hạn của tập X có thể không thuộc X.
- Với mọi $x \in \overline{X}$, nếu x không phải điểm cô lập của X thì X là điểm giới hạn của X.

Ví dụ 1.2.11. Xét tập $X = (0, 1] \cup \{2\}$ trong $\mathbb{R}$.

- Tất cả các điểm trong $[0, 1]$ đều là điểm giới hạn của X. Điểm $x = 2$ không phải là điểm giới hạn của X.
- Điểm $x = 2$ là điểm cô lập của X. Tất cả các điểm trong $(0, 1]$ không phải là điểm cô lập của X.

1.2.3 Tập bị chặn, tập liên thông đường

Định nghĩa 1.2.12 (Tập bị chặn)**.** *Tập $X \subset \mathbb{R}^n$ được gọi là tập bị chặn nếu tồn tại một quả cầu mở tâm $0_{\mathbb{R}^n}$ chứa X, nghĩa là*

$$\exists r > 0 : \ X \subset B(0_{\mathbb{R}^n}, r).$$

Một cách định nghĩa tập bị chặn tương đương, tập X được gọi là bị chặn nếu tồn tại $r > 0$ sao cho $\|x\| < r$, $\forall x \in X$.

Định nghĩa 1.2.13 (Đoạn thẳng, đường gấp khúc)**.**

- *Cho $x, y \in \mathbb{R}^n$. Đoạn thẳng nối hai vector x, y, ký hiệu $[x, y]$, là tập hợp xác định như sau:*

$$[x, y] = \{(1 - t)x + ty : \ t \in [0, 1]\}.$$

- *Cho $x, y, x^1, x^2, ..., x^k \in \mathbb{R}^n$, với $k \in \mathbb{N}$. Khi đó, tập hợp*

$$L = [x, x^1] \cup [x^1, x^2] \cup [x^2, x^3] \cup ... \cup [x^{k-1}, x^k] \cup [x^k, y]$$

được gọi là một đường gấp khúc nối x, y qua các điểm $x^1, x^2, ..., x^k$.

Định nghĩa 1.2.14 (Tập liên thông đường)**.** *Cho $X \subset \mathbb{R}^n$. Tập X được gọi là liên thông đường trong $\mathbb{R}^n$ nếu với mọi x, y thuộc X đều tồn tại một đường gấp khúc nằm trọn trong X nối hai điểm x, y.*

1.3 Sự hội tụ trong không gian $\mathbb{R}^n$

1.3.1 Định nghĩa sự hội tụ

Định nghĩa 1.3.1 (Dãy hội tụ). *Cho dãy vector $\{x^k\}_{k\in\mathbb{N}}$ trong $\mathbb{R}^n$. Ta nói dãy $\{x^k\}$ hội tụ về $x \in \mathbb{R}^n$ nếu*

$$\lim_{k\to\infty} \|x^k - x\| = 0.$$

Khi đó, ta ký hiệu $\lim\limits_{k\to\infty} x^k = x$ hoặc đơn giản là $\lim x^k = x$,

Chú ý rằng số tự nhiên k trong định nghĩa trên là chỉ số, không phải phép toán lũy thừa. Bởi vì trong không gian $\mathbb{R}^n$, mỗi vector có n thành phần. Để tránh trùng lặp với n thành phần của mỗi vector, người ta ghi chỉ số k của dãy ở trên.

Trong trường hợp $n = 2$ hoặc $n = 3$, cách ký hiệu dãy vector trở nên đơn giản hơn. Chẳng hạn trong $\mathbb{R}^2$, có thể ký hiệu dãy vector dạng quen thuộc $\{(x_n, y_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$. Hoặc trong $\mathbb{R}^3$, ta ký hiệu dãy dạng $\{(x_n, y_n, z_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Định lý 1.3.2. *Các mệnh đề sau đúng.*

i) Giới hạn (nếu có) của một dãy trong $\mathbb{R}^n$ là duy nhất.

ii) Giả sử $x^k = (x_1^k, x_2^k, ..., x_n^k)$ và $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$. Khi đó:

$$\lim x^k = x \iff \lim x_i^k = x_i, \ \forall i = 1, 2, ..., n.$$

Chứng minh. Chứng minh i), giả sử dãy $\{x^k\}_{k\in\mathbb{N}}$ hội tụ về x và y trong $\mathbb{R}^n$, tức là

$$\lim_{k\to\infty} \|x^k - x\| = \lim_{k\to\infty} \|x^k - y\| = 0.$$

Mặt khác, áp dụng bất đẳng thức tam giác, ta có

$$0 \le \|x - y\| \le \|x - x^k\| + \|x^k - y\|, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Từ đó suy ra $x = y$. Khẳng định ii) được suy ra từ bất đẳng thức sau

$$|x_i^k - x_i| \le \|x^k - x\| = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} |x_j^k - x_j|^2}, \quad \forall i = \overline{1, n}, \ \forall k \in \mathbb{N}.$$

□

Ví dụ 1.3.3. Trong $\mathbb{R}^2$, xét dãy

$$(u_k, v_k) = \left(1 - \frac{1}{k}, 2 + \frac{1}{k^2}\right), \quad k \in \mathbb{N}^*.$$

Ta thấy $\lim\limits_{k\to\infty} u_k = 1$ và $\lim\limits_{k\to\infty} v_k = 2$, nên theo Định lý 1.3.2, ta kết luận

$$\lim_{k\to\infty} (u_k, v_k) = (1, 2).$$

1.3.2 Tính đầy đủ của không gian $\mathbb{R}^n$

Định nghĩa 1.3.4 (Dãy Cauchy). *Dãy $\{x^k\}_{k\in\mathbb{N}}$ trong $\mathbb{R}^n$ được gọi là dãy Cauchy nếu*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists k_0 \in \mathbb{N} :\ \|x^m - x^p\| < \varepsilon,\ \forall m, p \geq k_0. \tag{1.8}$$

Mệnh đề 1.3.5. *Mọi dãy hội tụ trong $\mathbb{R}^n$ đều là dãy Cauchy.*

Chứng minh. Ý tưởng chứng minh mệnh đề này hoàn toàn tương tự như chứng minh kết quả tương ứng trong $\mathbb{R}$. Thật vậy, giả sử dãy $\{x^k\}_{k\in\mathbb{N}}$ hội tụ về x trong $\mathbb{R}^n$. Khi đó, ta có: $\lim\limits_{k\to\infty} \|x^k - x\| = 0$, tức là

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists k_0 \in \mathbb{N} :\ \|x^k - x\| < \frac{\varepsilon}{2},\ \forall k \geq k_0.$$

Khi đó, với mọi $m, p \geq k_0$, ta có

$$\|x^m - x\| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \text{và} \quad \|x^p - x\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Từ đây suy ra

$$\|x^m - x^p\| = \|(x^m - x) - (x^p - x)\| \leq \|x^m - x\| + \|x^p - x\| < \varepsilon.$$

Như vậy, dãy $\{x^k\}_{k\in\mathbb{N}}$ là dãy Cauchy trong $\mathbb{R}^n$. □

Định lý 1.3.6. *Không gian $\mathbb{R}^n$ là đầy đủ, nghĩa là mọi dãy Cauchy trong $\mathbb{R}^n$ đều hội tụ.*

Chứng minh. Ý tưởng để chứng minh định lý này dựa trên tính đầy đủ của $\mathbb{R}$, tức là mọi dãy Cauchy trong $\mathbb{R}$ đều đầy đủ. Đây là kết quả đã biết trong học phần *"Giải tích hàm một biến"* trước đó.

Giả sử $\{x^k\}_{k\in\mathbb{N}}$ là dãy Cauchy trong $\mathbb{R}^n$, ta sẽ chứng minh dãy này hội tụ. Thật vậy, $\{x^k\}$ là dãy Cauchy trong $\mathbb{R}^n$ nên thỏa mãn (1.8). Với mọi $j = 1, 2, ..., n$, ta luôn có

$$|x_j^m - x_j^p| \leq \|x^m - x^p\|.$$

Kết hợp với (1.8), ta suy ra $\{x_j^k\}$ là dãy Cauchy trong $\mathbb{R}$. Nhờ tính đầy đủ của $\mathbb{R}$, dãy $\{x_j^k\}$ hội tụ về x_j trong $\mathbb{R}$. Đặt $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, áp dụng ý *ii*) trong Định lý 1.3.2, ta kết luận dãy $\{x^k\}$ hội tụ về x. □

BÀI TẬP CHƯƠNG 1

Mục tiêu cơ bản của Chương 1:

- Trình bày được các khái niệm cơ bản trong không gian $\mathbb{R}^n$ như chuẩn Euclid, tích vô hướng, ánh xạ tuyến tính, quả cầu mở, quả cầu đóng.
- Vận dụng được các tính chất của chuẩn Euclid để khảo sát sự hội tụ của các dãy vector trong $\mathbb{R}^n$.
- Chứng minh được một số kết quả liên hệ giữa các khái niệm tôpô đơn giản trong $\mathbb{R}^n$.

1. Cho hai dãy $\{x^k\}$ và $\{y^k\}$ trong $\mathbb{R}^n$. Chứng minh rằng nếu $\lim x^k = x_0$ và $\lim y^k = y_0$ thì
$$\lim \|x^k - y^k\| = \|x_0 - y_0\|.$$
Chiều ngược lại của mệnh đề trên có đúng không?

2. Cho dãy $\{x^k\} \subset \mathbb{R}^n$, với $x^k = (x_1^k, x_2^k, ..., x_n^k)$, $k \in \mathbb{N}$. Chứng minh rằng dãy $\{x^k\}$ bị chặn khi và chỉ khi tồn tại $M > 0$ sao cho
$$|x_i^k| \leq M, \quad \forall i = 1, 2, ..., n.$$

3. Cho dãy $\{x^k\} \subset \mathbb{R}^n$ sao cho $\lim x^k = x_0$. Chứng minh rằng nếu $\{x^{k_j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ là dãy con của $\{x^k\}$ thì $\lim\limits_{j\to\infty} x^{k_j} = x_0$.

4. Chứng minh rằng mọi dãy bị chặn trong $\mathbb{R}^n$ đều có dãy con hội tụ.

5. Cho $X \subset \mathbb{R}^n$. Chứng minh rằng X là tập đóng trong $\mathbb{R}^n$ khi và chỉ khi
$$\forall \{x^k\} \subset X,\ \lim_{k\to\infty} x^k = x \Longrightarrow x \in X.$$

6. Chứng minh rằng $x \in \mathbb{R}^n$ là điểm giới hạn của tập $X \subset \mathbb{R}^n$ khi và chỉ khi tồn tại dãy $\{x^k\} \subset X$ sao cho $\lim x^k = x$.

7. Cho $X \subset \mathbb{R}^n$ khác rỗng.

   a) Ta nói $a \in \mathbb{R}^n$ là điểm tụ của X nếu với mọi $r > 0$, $B(a, r) \cap X$ có vô số phần tử. Chứng minh rằng khái niệm điểm tụ trùng với điểm giới hạn.

b) Giả sử thêm rằng

$$\inf\{\|x-y\|:\ x,y\in X,\ x\neq y\}>0.$$

Chứng minh rằng X không có điểm tụ.

8. Chứng minh rằng một tập con của $\mathbb{R}^n$ là mở khi và chỉ khi nó là hợp của các quả cầu mở trong $\mathbb{R}^n$.

9. Giao của một họ vô hạn các quả cầu mở có nhất thiết là một tập mở không?

10. Cho một dãy các đường tròn đồng tâm trong mặt phẳng có bán kính là $2^k, k\in\mathbb{N}$.

    a) Hợp của chúng có phải là tập đóng hay không?

    b) Hợp của chúng có phải là tập mở hay không?

11. Cho một dãy các đường tròn đồng tâm trong mặt phẳng có bán kính $2^{-k}, k\in\mathbb{N}$. Hợp của chúng có phải là tập đóng hay không?

Chương 2

Giới hạn của hàm nhiều biến

2.1 Hàm nhiều biến

2.1.1 Định nghĩa và ví dụ

Định nghĩa 2.1.1 (Hàm nhiều biến)**.** *Cho D là tập con khác rỗng của $\mathbb{R}^n$. Khi đó, ánh xạ $f : D \to \mathbb{R}$ được gọi là hàm nhiều biến và tập D được gọi là tập xác định của hàm f.*

Ví dụ 2.1.2. Có nhiều ví dụ về hàm nhiều biến trong thực tế. Chẳng hạn, các đại lượng Vật lý như nhiệt độ, vận tốc, áp suất, ... thường phụ thuộc vào không gian (thường là trong $\mathbb{R}^3$) và thời gian (trong $\mathbb{R}^+$). Như vậy, những đại lượng này được xem là các hàm nhiều biến.

Ví dụ 2.1.3. Cho $D = \mathbb{R}^2$ và ánh xạ $f : D \to \mathbb{R}$ xác định bởi công thức

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^3, \quad (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Ta nói hàm f là một hàm hai biến xác định trên $\mathbb{R}^2$. Để giảm bớt độ phức tạp khi viết các chỉ số, người ta thường thay biến hình thức $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ bởi biến $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Ngoài ra, khi định nghĩa hàm số trong ví dụ này, người ta thường viết một cách đơn giản: cho hàm f xác định bởi công thức $f(x, y) = x^2 - y^3$.

Tương tự như các hàm số một biến, khi cho biểu thức tường minh của hàm số mà không đề cập gì về tập xác định D, ta hiểu rằng hàm số này xác định khi biểu thức tường minh có nghĩa. Bên cạnh đó, người ta cũng xác định một số hàm sơ cấp. Cụ thể, các hàm nhiều biến có biểu thức xác định dưới dạng đa thức, phân thức, lượng giác, hàm mũ, lũy thừa là các hàm sơ cấp.

Ví dụ 2.1.4. Cho hàm số f xác định bởi công thức

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x-y}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Ta thấy rằng hàm f xác định trên $\mathbb{R}^2$. Tuy nhiên, biểu thức tường minh của hàm f không hoàn toàn là phân thức trên $\mathbb{R}^2$. Do đó, ta không thể kết luận f là hàm sơ cấp trên $\mathbb{R}^2$.

Trong trường hợp này, để chỉ ra mối liên hệ giữa hàm f với một hàm sơ cấp, người ta thường làm như sau. Đặt $D^* = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ và xét hàm $g : D^* \to \mathbb{R}$ xác định bởi

$$g(x,y) = \frac{x-y}{x^2+y^2}, \quad (x,y) \in D^*.$$

Rõ ràng, biểu thức xác định hàm g có dạng phân thức nên g là một hàm sơ cấp. Mặt khác, ta thấy rằng thu hẹp của hàm f trên D^* trùng với hàm g (ta thường ký hiệu $f_{|_{D^*}} = g$). Với ý tưởng này, người ta thường nói: f có công thức là hàm sơ cấp trên D^*.

2.1.2 Đồ thị của hàm nhiều biến

Định nghĩa 2.1.5 (Hàm nhiều biến)**.** *Cho D là tập con khác rỗng của $\mathbb{R}^n$ và hàm n biến $f : D \to \mathbb{R}$. Đồ thị G_f của hàm f là tập hợp điểm trong không gian $\mathbb{R}^{n+1}$ được xác định như sau*

$$G_f = \{(x, f(x)) : \ x \in D\}.$$

Ta có thể biểu diễn một cách trực quan đồ thị G_f thông qua việc vẽ đồ thị. Tuy nhiên, điều này chỉ được thực hiện dễ dàng với hàm một biến và hai biến. Trong trường hợp hàm một biến ($n = 1$), đồ thị G_f được phác họa dễ dàng trong mặt phẳng hai chiều. Trường hợp hàm hai biến ($n = 2$), công việc trở nên khó khăn hơn khi vẽ đồ thị trong không gian ba chiều. Nhưng với sự hỗ trợ của máy tính, việc vẽ đồ thị hàm hai biến vẫn là công việc đơn giản.

Với các hàm số nhiều biến, người ta có thể hình dung đồ thị hàm số thông qua khái niệm về đường mức ($n = 2$) hay mặt mức ($n \geq 2$). Cụ thể, với mỗi số $c \in \mathbb{R}$, ta xét tập

$$L_c = \{x \in D : \ f(x) = c\}.$$

Vẽ được nhiều đường mức L_c khác nhau có thể giúp ta có góc nhìn tổng thể về đồ thị hàm số G_f.

Bên cạnh đó, người ta cũng có thể hình dung đồ thị hàm số bằng cách vẽ các mặt cắt, nghĩa là cố định một biến (hoặc một vài biến) và vẽ đồ thị hàm số theo các biến còn lại. Khảo sát nhiều mặt cắt khác nhau cũng mang lại các thông tin có ích về đồ thị của hàm số ban đầu.

2.1.3 Hàm có giá trị vector

Định nghĩa 2.1.6 (Hàm nhiều biến có giá trị vector). *Cho trước các số tự nhiên $n, p \geq 1$. Giả sử D là tập con khác rỗng của $\mathbb{R}^n$. Khi đó, ánh xạ $f : D \to \mathbb{R}^p$ được gọi là hàm nhiều biến có giá trị vector và tập D được gọi là tập xác định của hàm f.*

Giá trị của hàm f trong không gian $\mathbb{R}^p$ nên ta có thể viết hàm f dưới dạng $f = (f_1, f_2, ..., f_p)$, trong đó $f_k : D \to \mathbb{R}$, $k = 1, 2, ..., p$ là các hàm n biến.

Ví dụ 2.1.7. Ví dụ về hàm nhiều biến có giá trị vector trong thực tế có thể kể đến như đại lượng vector vận tốc, lực, ngẫu lực, ... Các đại lượng này thường có hướng và độ lớn, đồng thời phụ thuộc vào không gian và thời gian. Như vậy, những đại lượng này được xem là các hàm nhiều biến có giá trị vector.

Trong học phần này, thay vì khảo sát hàm $f = (f_1, f_2, ..., f_p)$ có giá trị vector, người ta thường khảo sát từng hàm thành phần, là các hàm nhiều biến có giá trị thực. Những kiến thức đầy đủ hơn về hàm nhiều biến có giá trị vector sẽ được nối tiếp trong học phần chuyên đề giải tích *Phép tính vi phân trên không gian hữu hạn chiều.*

2.2 Giới hạn của hàm nhiều biến

2.2.1 Định nghĩa và ví dụ

Định nghĩa 2.2.1 (Giới hạn hàm số). *Cho D là tập con khác rỗng của $\mathbb{R}^n$, hàm số $f : D \to \mathbb{R}$ và x_0 là điểm giới hạn của D. Ta nói giới hạn của $f(x)$ khi x tiến tới x_0 là L nếu*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 :\ 0 < \|x - x_0\| < \delta,\ x \in D \implies |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Khi đó ta viết $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L$.

Ví dụ 2.2.2. Cho hàm số hai biến f xác định bởi

$$f(x, y) = x^2 + y^2, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Khi đó, ta có

$$\lim_{(x,y)\to(1,0)} f(x, y) = 1.$$

Thật vậy, với mỗi $\varepsilon > 0$, ta chọn $\delta = \min\left\{1, \frac{\varepsilon}{3}\right\} > 0$. Với mọi $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ sao cho $0 < \sqrt{(x-1)^2 + y^2} < \delta$, ta có

$$|f(x, y) - 1| = |(x-1)^2 + y^2 + 2(x-1)| < \delta^2 + 2\delta \le 3\delta \le \varepsilon.$$

Chú ý 2.2.3. Trong ví dụ trên, bằng cách đổi biến $u = x - 1$ và $v = y$, đồng thời khảo sát giới hạn của hàm $f - 1$ thay cho f, ta có thể chuyển đổi bài toán tính giới hạn của $f(x, y)$ khi (x, y) tiến về $(1, 0)$ thành bài toán tính giới hạn của hàm $g(u, v)$ khi (u, v) tiến về $(0, 0)$, trong đó hàm g xác định bởi

$$g(u, v) = u^2 + v^2 + 2u, \quad (u, v) \in \mathbb{R}^2.$$

Với phép đổi biến này, ta thấy

$$\lim_{(x,y)\to(1,0)} f(x, y) = 1 \Leftrightarrow \lim_{(u,v)\to(0,0)} g(u, v) = 0.$$

Việc ước lượng giới hạn 0 của hàm g khi (u, v) tiến về $(0, 0)$ mang đến một vài thuận lợi nhất định về mặt định hướng và tính toán. Đây là lý do mà hầu hết các bài tập tính giới hạn trong học phần này đều liên quan đến giới hạn dạng này.

2.2.2 Định lý giới hạn qua dãy

Việc tính giới hạn dựa trên định nghĩa rõ ràng quá phức tạp và không khả thi. Do đó, ta cần đưa ra các phương pháp khác để việc tính giới hạn trở nên thuận lợi hơn. Một trong các phương pháp để tính giới hạn hàm số là chuyển sang bài toán tính giới hạn dãy số. Phương pháp này được thể hiện qua định lý dưới đây.

Định lý 2.2.4 (Giới hạn qua dãy). *Cho D là tập con khác rỗng của $\mathbb{R}^n$, $f : D \to \mathbb{R}$ và x_0 là điểm giới hạn của D. Khi đó, hai mệnh đề sau tương đương:*

i) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L$.

ii) Với mọi dãy $\{x^k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset D\backslash\{x_0\}$, *nếu* $\lim x^k = x_0$ *thì* $\lim f(x^k) = L$.

Chứng minh. Định lý được chứng minh theo cách hoàn toàn tương tự như trong giải tích hàm một biến. Đầu tiên, ta chứng minh mệnh đề $i) \Rightarrow ii)$. Giả sử $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L$ và dãy $\{x^k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset D \setminus \{x_0\}$ sao cho $\lim x^k = x_0$. Ta sẽ chứng minh $\lim f(x^k) = L$. Thật vậy, với mọi $\varepsilon > 0$, do $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L$ nên tồn tại $\delta > 0$ sao cho:

$$0 < \|x - x_0\| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Hơn nữa, vì $\lim x^k = x_0$ nên tồn tại $k_0 \in \mathbb{N}$ sao cho với mọi $k \geq k_0$, ta có $\|x^k - x_0\| < \delta$. Từ đây dẫn đến $|f(x^k) - L| < \varepsilon$. Ta đã chứng minh xong $\lim f(x^k) = L$.

Mệnh đề $ii) \Rightarrow i)$ được chứng minh bằng phản chứng. Ta giả sử $ii)$ đúng và có thêm giả thiết phản chứng là phủ định của $i)$, nghĩa là tồn tại $\varepsilon > 0$ sao cho

$$\forall \delta > 0, \exists x \in D :\ 0 < \|x - x_0\| < \delta \text{ và } |f(x) - L| \geq \varepsilon. \tag{2.1}$$

Với mỗi $k \in \mathbb{N}^*$, áp dụng (2.1) với $\delta = \dfrac{1}{k}$, ta tìm được dãy $\{x^k\}_{k\in\mathbb{N}^*} \subset D \setminus \{x_0\}$ thỏa mãn

$$\|x^k - x_0\| < \frac{1}{k} \text{ và } |f(x^k) - L| \geq \varepsilon. \tag{2.2}$$

Theo mệnh đề $ii)$, do $\lim x^k = x_0$ nên ta có $\lim f(x^k) = L$. Điều này mâu thuẫn với (2.2). Định lý được chứng minh xong. □

Ví dụ 2.2.5. Tính giới hạn $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$ trong các trường hợp sau đây, nếu có:

a) $f(x, y) = x^3 - \sin y$ *b)* $f(x, y) = \dfrac{x \sin y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.

Lời giải. Với mọi dãy $(x_k, y_k) \neq (0,0)$ sao cho $\lim(x_k, y_k) = (0,0)$, đặt $u_k = f(x_k, y_k)$. Trường hợp a), ta có:

$$u_k = (x_k)^3 - \sin(y_k), \quad k \in \mathbb{N}.$$

Do $\lim(x_k, y_k) = (0,0)$ nên ta suy ra $\lim x_k = \lim y_k = 0$. Từ đó dẫn đến $\lim u_k = 0$. Vậy $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$.

Trường hợp b), ta có:

$$u_k = \frac{x_k \sin y_k}{\sqrt{x_k^2 + y_k^2}}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Sử dụng hai bất đẳng thức cơ bản sau đây

$$|u| \leq \sqrt{u^2 + v^2} \text{ và } |\sin u| \leq |u|, \quad \forall u, v \in \mathbb{R},$$

ta thu được đánh giá

$$|u_k| = \left| \frac{x_k}{\sqrt{x_k^2 + y_k^2}} \right| |\sin y_k| \leq |y_k|, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{2.3}$$

Do $\lim y_k = 0$ nên suy ra $\lim u_k = 0$. Kết luận $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$. □

Hệ quả sau đây được suy ra trực tiếp từ Định lý 2.2.4. Hệ quả này thường được sử dụng nhằm mục tiêu chỉ ra giới hạn hàm số không tồn tại.

Hệ quả 2.2.6. *Với cùng giả thiết trong Định lý 2.2.4, nếu tìm được hai dãy $\{x^k\}$ và $\{y^k\}$ trong $D \setminus \{x_0\}$ sao cho*

$$\begin{cases} \lim x^k = \lim y^k = x_0, \\ \lim f(x^k) = L_1 \neq L_2 = \lim f(y^k), \end{cases}$$

thì giới hạn $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ không tồn tại.

Ví dụ 2.2.7. Tính giới hạn $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ trong các trường hợp sau đây, nếu có:

$$a)\ f(x,y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \qquad b)\ f(x,y) = \sin\frac{1}{x^2 + y^2}.$$

Lời giải. Trường hợp a), xét hai dãy

$$(x_k, y_k) = \left(\frac{1}{k}, 0\right) \text{ và } (u_k, v_k) = \left(0, \frac{1}{k}\right), \quad k \in \mathbb{N}^*.$$

Ta thấy $\lim(x_k, y_k) = \lim(u_k, v_k) = (0, 0)$. Tuy nhiên

$$\lim f(x_k, y_k) = 1 \text{ và } \lim f(u_k, v_k) = -1.$$

Theo Hệ quả 2.2.6, ta kết luận giới hạn $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$ không tồn tại.

Tương tự, trong trường hợp b), ta xét hai dãy

$$(x_k, y_k) = \left(\frac{1}{\sqrt{k\pi}}, 0\right) \text{ và } (u_k, v_k) = \left(\frac{1}{\sqrt{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}}, 0\right), \quad k \in \mathbb{N}^*.$$

Ta có $\lim(x_k, y_k) = \lim(u_k, v_k) = (0, 0)$, nhưng

$$\lim f(x_k, y_k) = \lim \sin(k\pi) = 0 \text{ và } \lim f(u_k, v_k) = \lim \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) = 1.$$

Ta kết luận giới hạn $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$ không tồn tại. □.

Sử dụng định lý giới hạn qua dãy, ta có thể dễ dàng chứng minh được các kết quả liên quan đến giới hạn của tổng, hiệu, tích, thương của các hàm số. Các kết quả này được thể hiện qua mệnh đề bên dưới.

Mệnh đề 2.2.8. *Cho D là tập con khác rỗng của $\mathbb{R}^n$ và x_0 là điểm giới hạn của D. Giả sử các hàm f, g xác định trên D và $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L_1$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = L_2$. Khi đó, ta có các mệnh đề sau.*

i) $\lim\limits_{x\to x_0} cf(x) = cL_1$, *với c là hằng số.*

ii) $\lim\limits_{x\to x_0} [f(x) + g(x)] = L_1 + L_2$.

iii) $\lim\limits_{x\to x_0} [f(x)g(x)] = L_1L_2$.

iv) Nếu $L_2 \neq 0$ thì $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{L_1}{L_2}$.

2.2.3 Nguyên lý kẹp để tính giới hạn

Qua các ví dụ ở trên, ta thấy rằng việc sử dụng Định lý 2.2.4 để tính giới hạn hàm nhiều biến giúp ta chuyển từ bài toán tính giới hạn hàm nhiều biến sang bài toán tính giới hạn dãy số. Tuy nhiên, dãy số cần tính giới hạn $f(x^k)$ vẫn chưa phải là một biểu thức tường minh theo k, mà vẫn phụ thuộc vào dãy x^k. Điều này có thể gây ra một số khó khăn nhất định khi ước lượng giới hạn của dãy số này. Bên cạnh đó, cách đánh giá bất đẳng thức trong (2.3) đưa ra một gợi ý về việc sử dụng nguyên lý kẹp cho bài toán tính giới hạn hàm số. Ý tưởng này được thể hiện qua định lý dưới đây.

Định lý 2.2.9 (Nguyên lý kẹp)**.** *Cho D là tập con khác rỗng của $\mathbb{R}^n$ và x_0 là điểm giới hạn của D. Giả sử f, g, h là các hàm số xác định trên D và tồn tại hằng số $r > 0$ sao cho*

$$g(x) \leq f(x) \leq h(x), \quad \forall x \in D \cap B(x_0, r). \tag{2.4}$$

Khi đó, nếu $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \lim\limits_{x \to x_0} h(x) = L$ thì $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$.

Chứng minh. Định lý được chứng minh dựa trên Định lý 2.2.4 và nguyên lý kẹp trong giới hạn dãy số thực. Thật vậy, giả sử f, g, h thỏa mãn (2.4) và $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \lim\limits_{x \to x_0} h(x) = L$. Ta sẽ chứng minh $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$. Với mọi dãy $\{x^k\} \in D \setminus \{x_0\}$ sao cho $\lim x^k = x_0$, tồn tại $k_0 \in \mathbb{N}$ sao cho

$$\|x^k - x_0\| < r \text{ hay } x^k \in D \cap B(x_0, r), \quad \forall k \geq k_0.$$

Từ đó dẫn đến

$$g(x^k) \leq f(x^k) \leq h(x^k), \quad \forall k \geq k_0.$$

Mặt khác, áp dụng Định lý 2.2.4 ta suy ra $\lim g(x^k) = \lim h(x^k) = L$. Từ đó dẫn đến $\lim f(x^k) = L$. Định lý 2.2.4 cho ta kết luận $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$. □

Hệ quả sau đây là trường hợp đặc biệt của nguyên lý kẹp khi $g = -h$ và $L = 0$.

Hệ quả 2.2.10 (Hệ quả của nguyên lý kẹp)**.** *Cho D là tập con khác rỗng của $\mathbb{R}^n$ và x_0 là điểm giới hạn của D. Giả sử các hàm số f, g xác định trên D và tồn tại $r > 0$ sao cho*

$$|f(x)| \le g(x), \quad \forall x \in D \cap B(x_0, r).$$

Khi đó, nếu $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$ thì $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$.

Ví dụ 2.2.11. Tìm các giới hạn sau đây, nếu có:

$$a) \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} \qquad b) \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(xy)}{x}$$

Lời giải. Trường hợp a), ta xét hàm số f xác định trên $D = \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$ được định nghĩa bởi

$$f(x,y) = \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}, \quad (x,y) \in D.$$

Ta có đánh giá:

$$|f(x,y)| = \left| \frac{x^2}{x^2 + y^2} \right| |y| \le |y|, \quad \forall (x,y) \in D. \tag{2.5}$$

Do $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} |y| = 0$ nên theo hệ quả của nguyên lý kẹp, ta suy ra

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} = 0.$$

Trường hợp b), ta xét hàm số f xác định trên $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0\}$ được định nghĩa bởi

$$f(x,y) = \frac{\sin(xy)}{x}, \quad (x,y) \in D.$$

Ta biết $|\sin u| \le |u|$, $\forall u \in \mathbb{R}$. Từ đó suy ra

$$|\sin(xy)| \le |xy|, \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Từ đây dẫn đến:

$$\left| \frac{\sin(xy)}{x} \right| \le \left| \frac{xy}{x} \right| = |y|, \quad \forall (x,y) \in D.$$

Do $\lim_{(x,y)\to(0,0)} |y| = 0$ nên theo hệ quả của nguyên lý kẹp, ta suy ra giới hạn cần tính bằng 0.

Chú ý 2.2.12. Lưu ý rằng bất đẳng thức (2.5) đúng với mọi $(x, y) \in D$, nên bán kính r được nhắc đến trong (2.4) có thể chọn là một hằng số dương tùy ý.

Chú ý 2.2.13. Sinh viên cần lưu ý để tránh một số sai sót thường gặp. Ví dụ, một lời giải sai sinh viên thường mắc phải, như sau:

$$\text{Ta có:} \quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(xy)}{x} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(xy)}{xy} y = 0. \tag{2.6}$$

Trong lời giải này, ta thấy hai giới hạn

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(xy)}{xy} = 1 \quad \text{và} \quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} y = 0$$

là đúng, dẫn đến dấu $=$ thứ hai trong (2.6) cũng đúng. Tuy nhiên dấu $=$ đầu tiên trong (2.6) (màu đỏ) thì không. Bởi vì giới hạn $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(xy)}{x}$ được tính trên tập xác định

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x \neq 0\},$$

trong khi giới hạn thứ hai $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(xy)}{xy}$ được tính trên tập xác định nhỏ hơn

$$D' = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ xy \neq 0\} \subsetneq D.$$

Do đó, kết luận hai giới hạn này bằng nhau là không đủ cơ sở.

Như vậy, khi giải các bài tập dạng này, trong mọi biến đổi hoặc đánh giá bất đẳng thức, lưu ý *không nên thay đổi miền xác định của biểu thức*. Không quá khó để tránh các đánh giá làm thay đổi tập xác định, "lời giải đúng" trình bày ở trên là ví dụ. Khi đó "lời giải đúng" có vẻ "dài dòng" hơn "lời giải sai", nhưng đảm bảo được tính chặt chẽ về cơ sở lý thuyết dựa trên giả thiết (2.4) trong nguyên lý kẹp.

2.2.4 Phương pháp ước lượng giới hạn

Nguyên lý chung

Đối với bài toán giới hạn hàm biến, ta có thể phân loại thành hai dạng, tương ứng với việc áp dụng định lý giới hạn qua dãy hoặc nguyên lý kẹp. Cụ thể, trong trường hợp giới hạn tồn tại, ta có thể sử dụng nguyên lý kẹp để đánh giá. Ngược lại, trong trường hợp giới hạn không tồn tại, ta dùng hệ quả của định lý giới hạn qua dãy để chứng minh. Do đó, định hướng bài toán tính giới hạn quy về việc ước lượng giới hạn.

Dựa trên các ví dụ ở hai phần trên, ta thấy rằng việc ước lượng giới hạn của các hàm phân thức có thể được thực hiện bằng cách so sánh tốc độ triệt tiêu của tử và mẫu. Chi tiết hơn, giả sử rằng ta đang ước lượng giới hạn sau đây

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)}{g(x,y)},$$

biết rằng $f(x,y)$ và $g(x,y)$ đều có giới hạn bằng 0 khi (x,y) tiến về $(0,0)$. Để ước lượng giới hạn này, ta sẽ so sánh tốc độ hội tụ về 0 của hai hàm f và g. Khi có, có thể xảy ra một số trường hợp sau:

- Nếu f tiến về 0 nhanh hơn g, ta định hướng giới hạn bằng 0.
- Nếu f và g tiến về 0 cùng tốc độ, ta định hướng giới hạn không tồn tại.
- Nếu g tiến về 0 nhanh hơn f, ta xét thêm dấu của f và g. Trường hợp tỉ số f/g không thay đổi dấu, ta định hướng giới hạn bằng ∞, ngược lại, ta định hướng giới hạn không tồn tại.

Tiếp theo, để đánh giá tốc độ hội tụ về 0 của hai hàm f và g, ta sẽ so sánh hai hàm này với hàm lũy thừa của các đa thức. Chẳng hạn, nếu ta tìm được một đa thức $P(x,y)$ có bậc $\alpha \in \mathbb{R}$ sao cho

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)}{P(x,y)} = L \neq 0, \tag{2.7}$$

ta nói hàm f có "bậc" α. Lưu ý rằng, bậc được nhắc đến ở đây không hẳn là bậc của đa thức, mà chỉ là đại lượng đặc trưng cho tốc độ tiến về 0 của hàm f khi (x,y) tiến về $(0,0)$.

Một số ví dụ cụ thể

Để hình dung rõ hơn về phương pháp ước lượng ở trên, ta xét hai ví dụ dưới đây. Đầu tiên là một ví dụ đơn giản.

Ví dụ 2.2.14. Ta biết $\lim\limits_{u\to 0} \dfrac{\sin u}{u} = 1$ nên ta nói $\sin u$ cùng bậc với u khi u tiến về 0, tức là bậc 1. Như vậy, nếu áp dụng kết quả này, ta có:

- $\sin(xy)$ cùng bậc với xy, tức là bậc 2.
- $\sin(x+y)$ cùng bậc với $x+y$, tức là bậc 1.

Trong ví dụ tiếp theo, ta sẽ ước lượng bậc của một biểu thức phức tạp hơn, đòi hỏi trải qua một số tính toán cụ thể.

Ví dụ 2.2.15. Ước lượng bậc của $f(x,y)$ khi (x,y) tiến về $(0,0)$, trong đó hàm f xác định bởi:

$$f(x,y) = \sin(xy) - (xy).$$

Ta đưa ra một vài phân tích cho bài toán này:

- Theo ví dụ trên, ta ước lượng $\sin(xy)$ cùng bậc với xy, tức là bậc 2. Điều này kéo theo $f(x,y)$ có bậc 2. Tuy nhiên, ước lượng này không chính xác, vì ta không thể tìm được đa thức $P(x,y)$ bậc 2 sao cho (2.7) thỏa mãn. Như vậy, bậc của $f(x,y)$ lớn hơn 2.
- Để ước lượng bậc của $f(x,y)$, thật ra ta có thể ước lượng biểu thức một biến $\sin u - u$ khi u tiến về 0. Như vậy, ta chỉ cần tìm đa thức một biến thỏa mãn (2.7).
- Có nhiều phương pháp xác định đa thức P thông qua việc tính giới hạn hoặc khai triển Taylor. Dưới đây là phương pháp xác định P thông qua việc tính các giới hạn đơn giản.
- Ta tin rằng biểu thức $\sin u - u$ cùng bậc với u^α khi u tiến về 0, với α là số thực nào đó. Để xác định α, ta thực hiện theo thuật toán sau:
  - Bước 1: so sánh α với 1 bằng cách tính giới hạn

    $$\lim_{u\to 0} \frac{\sin u - u}{u} = \lim_{u\to 0} \frac{\cos u - 1}{1} = 0.$$

    Kết quả giới hạn này chứng tỏ $\sin u - u$ tiến về 0 nhanh hơn u, tức là $\alpha > 1$. Chuyển sang bước 2.

– Bước 2: so sánh α với 2 bằng cách tính giới hạn

$$\lim_{u\to 0}\frac{\sin u - u}{u^2} = \lim_{u\to 0}\frac{\cos u - 1}{2u} = \lim_{u\to 0}\frac{-\sin u}{u} = 0.$$

Tương tự suy luận trên, ta suy ra $\alpha > 2$. Chuyển sang bước 3.

– Bước 2: so sánh α với 3 bằng cách tính giới hạn

$$\lim_{u\to 0}\frac{\sin u - u}{u^3} = \lim_{u\to 0}\frac{\cos u - 1}{3u^2} = \lim_{u\to 0}\frac{-\sin u}{6u} = -\frac{1}{6}.$$

Giới hạn này chứng tỏ $\alpha = 3$.

- Các phân tích trên giúp ta định hướng được $\sin u - u$ cùng bậc với u^3 và do đó $f(x, y)$ cùng bậc với $(xy)^3$, tức là bậc 6.

Khả năng ước lượng bậc của các biểu thức giúp ta định hướng chính xác hơn cho bài toán tính giới hạn hàm nhiều biến. Ta có thể phân tích các ví dụ trước đó để thấy rõ hơn hiệu quả của việc ước lượng này.

- Ví dụ 2.2.11, trường hợp *a*): đây là bài toán đơn giản vì tử và mẫu đều là đa thức. Ta thấy tử tiến về 0 theo bậc 3 và mẫu tiến về 0 theo bậc 2, ta có lý do định hướng rằng tử tiến về 0 nhanh hơn mẫu. Như vậy, giới hạn này được dự đoán là 0. Do đó, ta sử dụng Hệ quả 2.2.10 để chứng minh.

- Ví dụ 2.2.11, trường hợp *b*): $\sin(xy)$ cùng bậc với xy, tức là bậc 2, trong khi mẫu bậc 1. Ta định hướng giới hạn bằng 0 và dùng Hệ quả 2.2.10 để chứng minh.

- Ví dụ 2.2.7, trường hợp *a*): ta thấy tử và mẫu đều có bậc 2, nên ta có lý do tin rằng tử và mẫu tiến về 0 với tốc độ "tương đương nhau". Tuy nhiên, nếu (x, y) tiến về $(0, 0)$ dọc theo các đường khác nhau có thể thu được giới hạn khác nhau. Chẳng hạn (x, y) tiến về $(0, 0)$ dọc theo trục hoành (có phương trình $y = 0$) thì biểu thức $\dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = 1$ tiến về 1. Còn khi (x, y) tiến về $(0, 0)$ dọc theo trục tung ($x = 0$) thì biểu thức $\dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = -1$ tiến về -1. Khi đó, giới hạn này được dự đoán là không tồn tại. Ta sẽ sử dụng Định lý 2.2.4 (cụ thể hơn là dùng Hệ quả 2.2.6) để chứng minh, tức là ta sẽ chọn hai dãy cùng tiến về $(0, 0)$ nhưng ảnh của nó qua $f(x, y) = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ tiến về hai giới hạn khác nhau. Trong

lời giải đã trình bày, ta xét giới hạn của $f(x, y)$ khi (x, y) tiến về $(0, 0)$ dọc theo hai trục tọa độ.

- Ví dụ 2.2.7, trường hợp b): đầu tiên ta ước lượng giới hạn của tỉ số $\frac{1}{x^2+y^2}$. Đối với tỉ số này, tử bậc 0 và mẫu bậc 2, đồng thời biểu thức này luôn dương nên tỉ số sẽ tiến ra $+\infty$. Bên cạnh đó, ta biết $\lim\limits_{u\to+\infty} \sin u$ không tồn tại. Do đó, ta dự đoán giới hạn hàm số không tồn tại, từ đó sử dụng Hệ quả 2.2.6 để chứng minh.

Việc ước lượng bậc hội tụ về 0 của các biểu thức còn giúp ta giải quyết được các bài toán chứa tham số. Dưới đây là một ví dụ.

Ví dụ 2.2.16. Tính giới hạn sau, tùy theo giá trị của tham số $a > 0$:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{(x^2+y^2)^a}.$$

Định hướng: Như đã phân tích ở ví dụ trước, ta sẽ đánh giá bậc của tử và mẫu trong biểu thức này. Trong biểu thức này, ta thấy tử có bậc 3 và mẫu có bậc $2a$. Bài toán có thể xảy ra các trường hợp sau đây

- Nếu bậc tử lớn hơn bậc mẫu, dự đoán giới hạn bằng 0, dùng hệ quả của nguyên lý kẹp để đánh giá.
- Nếu bậc tử bằng bậc mẫu, dự đoán giới hạn không tồn tại, chọn 2 dãy như trong Hệ quả 2.2.6 để chứng minh dự đoán.
- Nếu bậc tử nhỏ hơn bậc mẫu, tức là tử tiến về 0 chậm hơn mẫu, giới hạn có thể được dự đoán là ∞. Tuy nhiên, để ý rằng nếu (x, y) tiến về $(0, 0)$ dọc theo 2 trục tọa độ thì biểu thức sẽ tiến về 0. Do đó, trong trường hợp này ta dự đoán giới hạn không tồn tại.

  Phân tích thêm trong trường hợp này, nếu để ý đến dấu của biểu thức ở tử, ta thấy rằng giới hạn có thể tiến về $+\infty$ hoặc $-\infty$. Đây cũng là lý do để ta khẳng định giới hạn không tồn tại.

Với các phân tích như trên, lời giải cho bài toán này được khảo sát theo hai trường hợp.

Lời giải: Xét hàm số f xác định trên $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ được định nghĩa bởi

$$f(x, y) = \frac{x^2y}{(x^2+y^2)^a}, \quad (x, y) \in D.$$

Xét hai trường hợp sau:

Trường hợp 1, $3 > 2a \Leftrightarrow a < \frac{3}{2}$. Lưu ý rằng

$$x^2 \leq x^2 + y^2 \quad \text{và} \quad |y| \leq (x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}, \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,$$

nên ta có đánh giá như sau:

$$|f(x,y)| \leq \frac{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}{(x^2+y^2)^a} = (x^2+y^2)^{\frac{3}{2}-a}, \quad \forall (x,y) \in D.$$

Do $\frac{3}{2} - a > 0$ nên

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2)^{\frac{3}{2}-a} = 0.$$

Theo hệ quả của nguyên lý kẹp, ta suy ra

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0.$$

Trường hợp ngược lại, $3 \leq 2a \Leftrightarrow a \geq \frac{3}{2}$. Xét hai dãy

$$(x_k, y_k) = \left(0, \frac{1}{k}\right) \quad \text{và} \quad (u_k, v_k) = \left(\frac{1}{k}, \frac{1}{k}\right), \quad k \in \mathbb{N}^*.$$

Hai dãy này cùng tiến về $(0,0)$ khi $k \to \infty$, tuy nhiên

$$\lim f(x_k, y_k) = 0$$

và

$$\lim f(u_k, v_k) = \lim_{k\to\infty} \frac{k^{2a-3}}{2^a} = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{2}}, & \text{nếu } a = \frac{3}{2}, \\ +\infty, & \text{nếu } a > \frac{3}{2}. \end{cases}$$

Từ đó suy ra $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ không tồn tại trong trường hợp này.

2.3 Giới hạn lặp và giới hạn suy rộng

2.3.1 Liên hệ với giới hạn lặp

Đối với hàm nhiều biến, người ta có thể định nghĩa giới hạn theo từng biến, được gọi là giới hạn lặp. Để đơn giản, ta sẽ mô tả cho trường hợp hàm hai biến.

Định nghĩa 2.3.1. *Cho D là tập con khác rỗng của $\mathbb{R}^2$, (x_0, y_0) là điểm giới hạn của D và hàm $f : D \to \mathbb{R}$. Hai giới hạn sau đây (nếu tồn tại) được gọi là giới hạn lặp của hàm f khi (x, y) tiến về (x_0, y_0):*

$$\lim_{y\to y_0} \lim_{x\to x_0} f(x, y) \quad \textit{và} \quad \lim_{x\to x_0} \lim_{y\to y_0} f(x, y). \tag{2.8}$$

Về cơ bản, giới hạn lặp được định nghĩa thông qua các giới hạn của hàm một biến. Trong trường hợp tổng quát, hai giới hạn lặp trong (2.8) là khác nhau và khác với giới hạn $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y)$. Nhận định này được thể hiện qua hai ví dụ dưới đây.

Ví dụ 2.3.2. Xét hàm f xác định trên $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, được cho bởi công thức

$$f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, \quad (x, y) \neq (0, 0).$$

Đối với hàm số này, ta có thể dễ dàng kiểm tra được

$$\lim_{y\to 0} \lim_{x\to 0} f(x, y) = -1 \quad \text{và} \quad \lim_{x\to 0} \lim_{y\to 0} f(x, y) = 1.$$

Tuy nhiên, giới hạn $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$ không tồn tại.

Ví dụ 2.3.3. Xét hàm f xác định trên $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$, được cho bởi công thức

$$f(x, y) = x \sin \frac{1}{y}, \quad (x, y) \in D.$$

Sử dụng đánh giá $|f(x, y)| \leq |x|$, $\forall (x, y) \in D$, ta suy ra được

$$\lim_{y\to 0} \lim_{x\to 0} f(x, y) = 0 \quad \text{và} \quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = 0.$$

Tuy nhiên, giới hạn $\lim\limits_{y\to 0} f(x, y)$ không tồn tại với mọi $x \neq 0$, dẫn đến giới hạn lặp $\lim\limits_{x\to 0} \lim\limits_{y\to 0} f(x, y)$ không xác định.

Dưới góc nhìn của những người làm toán lý thuyết, một câu hỏi tự nhiên được đặt ra là khi nào sự tồn tại của giới hạn hàm nhiều biến có thể kéo theo sự tồn tại của các giới hạn lặp và ngược lại. Các bạn sinh viên quan tâm có thể thử tìm hiểu các mối liên hệ này.

2.3.2 Một số giới hạn suy rộng

Tương tự như định nghĩa giới hạn của hàm một biến, ta có thể đưa ra các định nghĩa liên quan đến giới hạn suy rộng khi giới hạn bằng vô cùng hoặc khi các biến tiến ra vô cùng. Có nhiều định nghĩa về giới hạn suy rộng, dưới đây là một vài ví dụ.

Định nghĩa 2.3.4. *Ta nói giới hạn của $f(x)$ bằng $+\infty$ khi x tiến về x_0, ký hiệu là $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$, nếu*

$$\forall M > 0,\ \exists \delta > 0:\ 0 < \|x - x_0\| < \delta,\, x \in D \implies f(x) > M.$$

Định nghĩa 2.3.5. *Giả sử tập D không bị chặn trong $\mathbb{R}^n$. Ta nói giới hạn của $f(x)$ bằng L khi $\|x\|$ tiến ra ∞, ký hiệu $\lim_{\|x\|\to\infty} f(x) = L$, nếu*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists M > 0:\ \|x\| > M,\, x \in D \implies |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Định nghĩa 2.3.6. *Giả sử D là phần bù của một tập bị chặn trong $\mathbb{R}^2$. Ta nói giới hạn của $f(x, y)$ bằng L khi (x, y) tiến ra $(+\infty, +\infty)$, ký hiệu $\lim_{(x,y)\to(+\infty,+\infty)} f(x, y) = L$, nếu*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists M > 0:\ x > M,\, y > M,\, (x, y) \in D \implies |f(x, y) - L| < \varepsilon.$$

Ta hoàn toàn có thể xây dựng được các kết quả tương tự như định lý giới hạn theo dãy và nguyên lý kẹp để tính toán các giới hạn suy rộng.

2.4 Tính liên tục của hàm nhiều biến

2.4.1 Định nghĩa hàm số liên tục

Định nghĩa 2.4.1 (Hàm số liên tục)**.** *Cho D là tập khác rỗng trong $\mathbb{R}^n$ và hàm số $f : D \to \mathbb{R}$. Ta nói hàm f liên tục tại $x_0 \in D$ nếu*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0:\ \|x - x_0\| < \delta,\ x \in D \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon. \tag{2.9}$$

Hàm f được gọi là liên tục trên D nếu f liên tục tại mọi điểm thuộc D.

Chú ý 2.4.2. i) Nếu x_0 là điểm cô lập của D thì f liên tục tại x_0. Thật vậy, x_0 là điểm cô lập của D thì tồn tại $r > 0$ sao cho

$$D \cap B(x_0, r) = \{x_0\}.$$

Khi đó, mệnh đề (2.9) hiển nhiên đúng bằng cách chọn $\delta = r$.

ii) Ngược lại, nếu x_0 là điểm giới hạn của D, thì định nghĩa liên tục có thể viết lại đơn giản như sau:

$$f \text{ liên tục tại } x_0 \iff \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

iii) Các hàm sơ cấp xác định trên tập mở D thì liên tục trên D.

Ví dụ 2.4.3. Xét tính liên tục của các hàm số sau trên $\mathbb{R}^2$.

a) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}, & \text{khi } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{khi } (x,y) = (0,0). \end{cases}$

b) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^2+y^2}, & \text{khi } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{khi } (x,y) = (0,0). \end{cases}$

Lời giải câu a): Với mọi $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, ta chọn số thực r sao cho $0 < r < \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$. Khi đó

$$(0,0) \notin B := B((x_0, y_0), r).$$

Do đó, trên B hàm f có dạng

$$f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}, \quad (x,y) \in B.$$

Như vậy, f có công thức là hàm sơ cấp trên quả cầu mở B nên liên tục trên B. Dẫn đến f liên tục tại (x_0, y_0). Như vậy, ta chỉ còn xét tính liên tục của f tại $(0,0)$ là một điểm giới hạn của $\mathbb{R}^2$. Tuy nhiên giới hạn

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$$

là không tồn tại. Thật vậy, xét hai dãy

$$(x_k, y_k) = \left(0, \frac{1}{k}\right) \quad \text{và} \quad (u_k, v_k) = \left(\frac{1}{k}, \frac{1}{k}\right)$$

cùng tiến về $(0,0)$, nhưng ta lại có

$$\lim f(x_k, y_k) = 0 \quad \text{và} \quad \lim f(u_k, v_k) = \frac{1}{2}.$$

Do đó hàm f không liên tục tại $(0,0)$. Vậy hàm f chỉ liên tục trên tập $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

Câu b) được giải tương tự như trên, kết luận hàm f liên tục trên $\mathbb{R}^2$.

2.4.2 Một số định lý liên quan

Tương tự như tính liên tục của hàm một biến, ta có thể chứng minh được tổng, hiệu, tích, thương và hợp của hai hàm liên tục là liên tục. Bên cạnh đó, ta cũng xây dựng được định lý Weierstrass và định lý Bolzano-Cauchy cho hàm nhiều biến.

Định lý 2.4.4 (Weierstrass)**.** *Cho D là tập đóng, khác rỗng và bị chặn trong $\mathbb{R}^n$. Giả sử hàm $f : D \to \mathbb{R}$ liên tục trên D. Khi đó, f đạt giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất trên D, nghĩa là tồn tại $u, v \in D$ sao cho*

$$f(u) \le f(x) \le f(v), \quad \forall x \in D.$$

Chứng minh. Chứng minh được chia thành hai bước. Bước đầu tiên, ta chứng minh $f(D)$ bị chặn trên bằng phản chứng. Thật vậy, giả sử $f(D)$ không bị chặn trên, tức là tồn tại dãy $\{y_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset f(D)$ sao cho $\lim y_k = +\infty$. Xét dãy $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset D$ sao cho $y_k = f(x_k)$. Áp dụng Bài tập 4 Chương **??**, do D bị chặn nên dãy $\{x_k\}$ có dãy con $\{x_{k_j}\}_j$ hội tụ về x_0. Theo Bài tập 5 Chương **??**, do D đóng nên $x_0 \in D$. Khi đó, kết hợp với giả thiết f liên tục tại x_0, ta có

$$+\infty = \lim_{j\to\infty} y_{k_j} = \lim_{j\to\infty} f(x_{k_j}) = f(x_0).$$

Mâu thuẫn này cho phép ta kết luận $f(D)$ bị chặn trên.

Khi đó, tồn tại $\alpha = \sup f(D)$. Xét dãy $\{z_k\} \subset f(D)$ sao cho $\lim z_k = \alpha$. Tương tự như chứng minh ở bước đầu tiên, ta xây dựng được dãy $\{v_{k_j}\}_j$

hội tụ về v trong D sao cho $z_{k_j} = f(v_{k_j})$. Do f liên tục tại v nên

$$\alpha = \lim_{j\to\infty} z_{k_j} = \lim_{j\to\infty} f(v_{k_j}) = f(v).$$

Từ đây suy ra hàm f đạt giá trị lớn nhất tại v. Chứng minh được thực hiện tương tự cho giá trị nhỏ nhất. □

Chú ý 2.4.5. Bằng suy luận tương tự như trong chứng minh trên, ta cũng có thể chỉ ra được rằng $f(D)$ là tập đóng và bị chặn. Điều này dẫn đến f đạt giá trị lớn nhất và nhỏ nhất trên D.

Định lý 2.4.6 (Bolzano-Cauchy). *Cho D là tập khác rỗng và liên thông đường trong $\mathbb{R}^n$. Giả sử $f : D \to \mathbb{R}$ liên tục trên D và hai vector $u, v \in D$ sao cho $f(u) < f(v)$. Khi đó, f đạt mọi giá trị trung gian giữa $f(u)$ và $f(v)$, nghĩa là với mọi số thực c thỏa mãn $f(u) < c < f(v)$, tồn tại $w \in D$ sao cho $f(w) = c$.*

Chứng minh. Giả sử $u, v \in D$ sao cho $f(u) < f(v)$ và số thực c thỏa mãn $f(u) < c < f(v)$. Do D liên thông đường nên tồn tại đường gấp khúc nối $x^0 = u$ và $x^{k+1} = v$ đi qua các điểm $x^1, x^2, ..., x^k$ trong D. Do c nằm giữa $f(x^0)$ và $f(x^{k+1})$ nên ta có thể chọn $j \in \{0, 1, ..., k\}$ sao cho c nằm giữa $f(x^j)$ và $f(x^{j+1})$. Không mất tính tổng quát, giả sử

$$f(x^j) < c < f(x^{j+1}). \tag{2.10}$$

Xét hàm $F : [0, 1] \to \mathbb{R}$ xác định bởi

$$F(t) = f((1-t)x^j + tx^{j+1}), \quad t \in [0, 1]. \tag{2.11}$$

Để ý rằng đoạn nối $[x^j, x^{j+1}] \subset D$ và do f liên tục trên D nên F liên tục trên $[0, 1]$. Mặt khác, giả thiết (2.10) được viết lại thành $F(0) < c < F(1)$. Theo định lý giá trị trung gian cho hàm một biến, tồn tại $t_0 \in [0, 1]$ sao cho $F(t_0) = c$. Chọn $w = (1 - t_0)x^j + t_0x^{j+1}$, ta thu được $f(w) = c$. Định lý được chứng minh. □

Chú ý 2.4.7. Ý tưởng thiết lập hàm F như trong (2.11) thường được sử dụng khá nhiều khi chứng minh tính chất liên quan đến hàm nhiều biến. Một cách đơn giản, người ta chuyển việc khảo sát hàm nhiều biến f sang khảo sát hàm một biến F. Từ đó áp dụng kết quả đã biết cho hàm một biến F để thu lại kết quả tương ứng cho hàm nhiều biến f.

BÀI TẬP CHƯƠNG 2

Mục tiêu cơ bản của Chương 2:

- Giải thích được phương pháp ước lượng tốc độ triệt tiêu của một biểu thức nhiều biến hội tụ về 0.
- Vận dụng được nguyên lý kẹp và hệ quả của định lý giới hạn theo dãy để tính giới hạn hàm nhiều biến.
- Phân tích được mối liên hệ giữa giới hạn hàm nhiều biến và các giới hạn lặp, đồng thời trình bày được định nghĩa một số giới hạn suy rộng cho hàm nhiều biến.
- Khảo sát được sự liên tục của hàm nhiều biến, đồng thời chứng minh được một số kết quả đơn giản liên quan đến tính liên tục của hàm nhiều biến.

1. (Bài tập bổ trợ, nhắc lại kiến thức giải tích hàm một biến) Cho $D \subset \mathbb{R}$ sao cho 0 là điểm giới hạn của D. Xét hàm $f : D \to \mathbb{R}$.

   (a) Giả sử $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \dfrac{1}{2}$. Chứng minh rằng tồn tại $\delta > 0$ sao cho
   $$|f(x)| < 1, \ \forall x \in (-\delta, \delta) \cap D.$$

   (b) Giả sử $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = a$ và $b > |a|$. Chứng minh rằng tồn tại $\delta > 0$ sao cho
   $$|f(x)| < b, \ \forall x \in (-\delta, \delta) \cap D.$$

   (c) Từ đó suy ra các bất đẳng thức sau đúng với mọi u đủ nhỏ:
   $$|\cos u - 1| \le u^2; \quad |\sin u - u| \le |u|^3; \quad |e^u - u - 1| \le u^2.$$

   Bài tập trên đây nhằm chứng minh một số bất đẳng thức cơ bản cho hàm một biến, từ đó ước lượng được tốc độ tiến về 0 của các biểu thức này. Việc ước lượng tốc độ hội tụ về 0 của những biểu thức tương tự cũng có thể được thực hiện bằng phương pháp này.

2. Xác định tốc độ tiến về 0 của các biểu thức sau khi (x, y) tiến về $(0, 0)$:

(a) $\sin(x+y) - (x+y)$.

(b) $\ln(1+x^2+y^2) - x^2 - y^2$.

(c) $\sqrt[3]{\sin(xy)} - 1$.

(d) $e^{x^2} - \cos y$.

(e) $x \sin y - y \sin x$.

(f) $x^2 \sin y - y^2 \sin x$.

(g) $x \sin y - xy$.

(h) $\sin(x^3 + xy)$.

3. Khảo sát sự tồn tại của các giới hạn sau:

(a) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\tan(xy)}{x}$.

(b) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\sin(x^2 y)}{x^2+y^2}$.

(c) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2 \sin y - y^2 \sin x}{x^2+y^2}$.

(d) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^3 - y^2}{x^2 - xy + y^2}$.

(e) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^3 - y^4}{x^2+y^2}$.

(f) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2 y}{x^2+y^4}$.

(g) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy^2}{x^2+y^4}$.

(h) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy^4}{x^4+y^6}$.

(i) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\sin(x^2+xy)}{(x^2+y^2)^{\frac{5}{6}}}$.

(j) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x \sin y \left(\sqrt[3]{\sin(xy)} - 1\right)}{x^2+|y|}$.

4. Khảo sát sự tồn tại của các giới hạn sau:

(a) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2+y^2}{x^4+y^4}$.

(b) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2)^{x^2+y^2}$.

(c) $\lim\limits_{(x,y)\to(+\infty,+\infty)} (x^2+y^2)e^{-(x+y)}$.

(d) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+2y^2)\ln(x^2+y^2)$.

(e) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x \sin y - xy}{x^2+y^2}$.

(f) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{e^{x^2} - \cos y}{x^2+y^2}$.

(g) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\ln\left(x^2+e^y\right)}{x^2+y^2}$.

(h) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\left(e^{xy} - xy - 1\right)x}{x^4+y^4}$.

(i) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x \sin y - y \sin x}{x^2+y^2}$.

5. Cho $a > 0$, tính giới hạn sau tùy theo giá trị của a:

(a) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x\sin(xy^2)}{(x^2+y^2)^a}$.

(b) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\sin(xy)-xy}{(x^2+2y^2)^a}$.

(c) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{e^{xy}-1}{(x^2+y^2)^a}$.

(d) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\ln(x^2y^2+1)-x^2y^2}{(x^2+y^2)^a}$.

6. Cho tham số $a>0$ và hàm số $f:\ \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ xác định bởi:

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3-y^4}{(x^2+3y^2)^a}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

a) Với $a=1$, xét tính liên tục của f trên $\mathbb{R}^2$.

b) Với $a=\dfrac{3}{2}$, xét tính liên tục của f trên $\mathbb{R}^2$.

c) Xét tính liên tục của f tại $(0,0)$ theo a.

7. Cho các tham số $a>0$, $m\in\mathbb{R}$ và hàm số $f:\ \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ xác định bởi:

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos(xy)}{(x^2+y^2)^a}, & (x,y)\neq(0,0),\\ m, & (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

a) Với $a=\dfrac{1}{2}$, tìm m để hàm f liên tục trên $\mathbb{R}^2$.

b) Với $a=1$, tìm m để hàm f liên tục trên $\mathbb{R}^2$.

c) Xét tính liên tục của f tại $(0,0)$ theo a và m.

8. Cho tham số $a>0$ và hàm số $f:\ \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ xác định bởi:

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{|x|^a+|y|}\cos\dfrac{1}{(x^2+y^2)^a}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

a) Với $a=2$, xét tính liên tục của f trên $\mathbb{R}^2$.

b) Xét tính liên tục của f tại $(0,0)$ theo a.

9. Cho $U=\big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ x^2>y^2\big\}$. Chứng minh U là tập mở trong $\mathbb{R}^2$.

10. Cho hàm f xác định và liên tục trên $\mathbb{R}^2$ và hằng số $\alpha\in\mathbb{R}$.

a) Chứng minh rằng tập hợp $U=\big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ f(x,y)>\alpha\big\}$ là tập mở trong $\mathbb{R}^2$.

b) Từ đó suy ra tập hợp $V = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; f(x,y) = \alpha\right\}$ là tập đóng trong $\mathbb{R}^2$.

11. Phát biểu và chứng minh các kết quả về tổng, hiệu, tích, thương và hợp của hai hàm liên tục là liên tục.

12. Cho D là tập khác rỗng trong $\mathbb{R}^n$ và hàm $f : D \to \mathbb{R}$ liên tục. Giả sử rằng $a, b \in D$ sao cho $[a,b] \subset D$. Xét hàm $F : [0,1] \to \mathbb{R}$ xác định bởi

$$F(t) = f\left((1-t)a + tb\right), \quad t \in [0,1].$$

Chứng minh F liên tục trên $[0,1]$.

13. (Định lý Cantor) Hàm $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ được gọi là liên tục đều trên D nếu

$$\forall \varepsilon > 0, \; \exists \delta > 0 : \; \|x - y\| < \delta, \, x, y \in D \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Chứng minh rằng nếu hàm $f : D \to \mathbb{R}$ liên tục trên D đóng và bị chặn trong $\mathbb{R}^n$ thì f liên tục đều trên D.

14. Kết luận trong định lý Cantor còn đúng không nếu bỏ một trong hai giả thiết đóng hoặc bị chặn của tập D?

15. Hãy tìm một vài kết quả về hàm số liên tục trong giải tích hàm một biến đã biết để mở rộng cho trường hợp hàm nhiều biến, đồng thời chứng minh các kết quả đó.

16. Cho hàm hai biến $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ và $(x_0, y_0) \in D$. Mệnh đề sau có đúng không: "Hàm f liên tục tại (x_0, y_0) khi và chỉ khi f liên tục theo từng biến tại x_0 và y_0"?

17. Tồn tại hay không một song ánh liên tục từ $[0;1]$ lên $[0;1] \times [0;1]$?

Chương 3

Phép tính vi phân hàm nhiều biến

3.1 Sự khả vi của hàm nhiều biến

3.1.1 Đạo hàm riêng bậc nhất

Ta có thể sử dụng đạo hàm của hàm một biến để định nghĩa đạo hàm theo từng biến cho hàm nhiều biến. Các đạo hàm này được gọi là đạo hàm riêng của hàm nhiều biến. Về ý nghĩa thực tế, giống như hàm một biến, đạo hàm riêng của hàm f tại x theo biến thứ i đặc trưng cho tốc độ tăng trưởng (sự thay đổi) của hàm f tại x so với biến dọc theo trục tọa độ thứ i.

Ký hiệu $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ là hệ cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^n$, với

$$e_1 = (1, 0, ..., 0),\ e_2 = (0, 1, ..., 0), ...,\ e_n = (0, 0, ..., 1).$$

Định nghĩa 3.1.1 (Đạo hàm riêng)**.** *Cho tập mở $U \subset \mathbb{R}^n$, hàm số $f : U \to \mathbb{R}$ và $x \in U$. Đạo hàm riêng của hàm f tại x theo biến thứ i (với $i = 1, 2, ..., n$) là đại lượng xác định bởi*

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) := \lim_{t \to 0} \frac{f(x + te_i) - f(x)}{t},$$

nếu giới hạn ở vế phải tồn tại hữu hạn.

Thôn thường, các ví dụ liên quan đến phép tính vi phân của hàm nhiều biến sẽ được khảo sát trong những trường hợp đơn giản cho hàm hai biến hoặc ba biến. Trong trường hợp hàm hai biến, tức là $U \subset \mathbb{R}^2$, định nghĩa các đạo hàm riêng của f tại điểm $(x_0, y_0) \in U$ có thể được viết lại một

cách tường minh hơn, như sau:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) := \lim_{t\to 0} \frac{f(x_0+t, y_0) - f(x_0, y_0)}{t},$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) := \lim_{t\to 0} \frac{f(x_0, y_0+t) - f(x_0, y_0)}{t}.$$

Ví dụ 3.1.2. a) Cho hàm f xác định bởi $f(x, y) = x^2y^3$. Ta dễ dàng tính được:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2xy^3 \quad \text{và} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 3x^2y^2.$$

b) Cho hàm g xác định bởi $g(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2}, & \text{nếu } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{nếu } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$

Tính các đạo hàm riêng của g tại $(0, 0)$.

Lời giải câu b): Đạo hàm riêng theo biến x tại $(0, 0)$:

$$\frac{\partial g}{\partial x}(0, 0) = \lim_{t\to 0} \frac{g(t, 0) - g(0, 0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{t - 0}{t} = 1.$$

Đạo hàm riêng theo biến y tại $(0, 0)$:

$$\frac{\partial g}{\partial y}(0, 0) = \lim_{t\to 0} \frac{g(0, t) - g(0, 0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{-t - 0}{t} = -1.$$

Định nghĩa 3.1.3 (Gradient)**.** *Khi đạo hàm riêng theo mọi biến đều tồn tại thì vector $\nabla f(x)$, xác định bởi*

$$\nabla f(x) := \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \frac{\partial f}{\partial x_2}(x), ..., \frac{\partial f}{\partial x_n}(x)\right),$$

được gọi là **gradient** *của f tại x.*

Nếu vector gradient của f tồn tại với mọi $x \in U$, khi đó ∇f là một hàm nhiều biến có giá trị vector $\nabla f : U \to \mathbb{R}^n$. Ví dụ, với $f(x, y) = x^2y^3$ thì

$$\nabla f(x, y) = (2xy^3, 3x^2y^2).$$

Định lý 3.1.4. *Cho f và g là hai hàm số có đạo hàm riêng tại mọi điểm trên tập mở $U \subset \mathbb{R}^n$. Khi đó:*

i) $\nabla(f+g) = \nabla f + \nabla g$.

ii) $\nabla(cf) = c.\nabla f$, *với mọi hằng số* $c \in \mathbb{R}$.

iii) $\nabla(fg) = g.\nabla f + f.\nabla g$.

3.1.2 Định nghĩa sự khả vi

Câu hỏi đặt ra hoàn toàn tự nhiên là: "nếu tất cả các đạo hàm riêng của một hàm nhiều biến đều tồn tại thì có đủ để khẳng định hàm đó khả vi hay chưa?" Để trả lời câu hỏi này, ta xét ví dụ dưới đây.

Ví dụ 3.1.5. Cho hàm f xác định bởi

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}, & \text{nếu } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{nếu } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Rõ ràng, các đạo hàm riêng của f tại $(0,0)$ đều tồn tại và

$$\frac{\partial f}{\partial f}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0.$$

Tuy nhiên, hàm f thậm chí không liên tục tại $(0,0)$.

Ví dụ trên thể hiện rằng sự tồn tại của tất cả các đạo hàm riêng chưa thể đưa đến sự khả vi của hàm nhiều biến. Do đó, để định nghĩa sự khả vi cho hàm nhiều biến, ta cần một góc nhìn toàn diện hơn, thay vì kế thừa định nghĩa về sự khả vi của hàm một biến. Trước hết, ta nhắc lại định nghĩa sự khả vi cho hàm một biến. Hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ được gọi là có đạo hàm (khả vi) tại x nếu giới hạn sau tồn tại hữu hạn

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = a \in \mathbb{R}.$$

Định nghĩa này tương đương với định nghĩa: hàm f có đạo hàm tại x nếu tồn tại $a \in \mathbb{R}$ sao cho

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)-ah}{h} = 0.$$

Khi đó ta định nghĩa $f'(x) := a$ là đạo hàm của f tại x.

Sự khả vi của hàm nhiều biến có thể được định nghĩa dưới góc nhìn tương tự như định nghĩa trên đối với hàm một biến. Tuy nhiên, đối với hàm nhiều biến, đại lượng h trong định nghĩa là một vector trong $\mathbb{R}^n$. Do đó, để các phép toán được hợp lý, a nên là một vector trong $\mathbb{R}^n$ và phép nhân ah trong trường hợp này được hiểu là tích vô hướng $\langle a, h\rangle$ giữa hai vector a và h. Bên cạnh đó, h ở mẫu được thay bởi độ lớn của vector h.

Định nghĩa 3.1.6. *Cho U là tập mở trong $\mathbb{R}^n$ và hàm $f : U \to \mathbb{R}$. Hàm f được gọi là khả vi tại $x \in U$ nếu tồn tại $a \in \mathbb{R}^n$ sao cho*

$$\lim_{h\to 0_{\mathbb{R}^n}} \frac{f(x+h) - f(x) - \langle a, h\rangle}{\|h\|} = 0. \tag{3.1}$$

Khi đó, ta ký hiệu $f'(x) = a$, gọi là đạo hàm của f tại điểm x.

Hàm f được gọi là khả vi trên U nếu nó khả vi tại mọi điểm thuộc U.

Chú ý 3.1.7. Do U mở và $x \in U$ nên tồn tại $r > 0$ sao cho $B(x, r) \subset U$. Khi đó, với mọi $h \in \mathbb{R}^n$ sao cho $\|h\| < r$, ta có $x + h \in B(x, r)$, dẫn đến $x + h \in U$. Khi đó, định nghĩa thông qua biểu thức (3.1) có thể được viết lại dưới dạng: tồn tại $a \in \mathbb{R}^n$ và $r > 0$ sao cho với mọi $h \in \mathbb{R}^n$ thỏa mãn $\|h\| < r$, ta có:

$$f(x+h) - f(x) - \langle a, h\rangle = \|h\|\varphi(h), \tag{3.2}$$

trong đó $\lim_{h\to 0_{\mathbb{R}^n}} \varphi(h) = 0$. Trong một số chứng minh, cách viết này có thể thuận tiện hơn biểu thức (3.1).

Trong Định nghĩa 3.1.6, giả sử sự tồn tại của vector a thỏa mãn (3.1) là không duy nhất, khi đó định nghĩa $f'(x) = a$ không thể xác định. Mệnh đề sau đây chỉ ra sự tồn tại duy nhất của vector a, nhằm thể hiện sự hợp lý của định nghĩa này.

Mệnh đề 3.1.8. *Vector a trong* (3.1) *hoặc* (3.2) *nếu tồn tại là duy nhất.*

Chứng minh. Giả sử tồn tại hai vector $a = (a_1, a_2, ..., a_n), b = (b_1, b_2, ..., b_n) \in \mathbb{R}^n$ cùng thỏa mãn (3.2), nghĩa là có $r_1, r_2 > 0$ sao cho

$$f(x+h) - f(x) = \langle a, h\rangle + \|h\|\varphi_1(h), \quad \forall h \in B(0_{\mathbb{R}^n}, r_1),$$

và

$$f(x+h) - f(x) = \langle b, h\rangle + \|h\|\varphi_2(h), \quad \forall h \in B(0_{\mathbb{R}^n}, r_2),$$

trong đó $\lim_{h\to 0_{\mathbb{R}^n}} \varphi_1(h) = \lim_{h\to 0_{\mathbb{R}^n}} \varphi_2(h) = 0$. Đặt $r = \min\{r_1, r_2\}$ và $\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$, ta suy ra được

$$\langle a - b, h\rangle = \|h\|\varphi(h), \quad \forall h \in B(0_{\mathbb{R}^n}, r).$$

Với mỗi $i = 1, 2, ..., n$ và $k \in \mathbb{N}^*$ sao cho $\frac{1}{k} < r$, ta chọn $h = \frac{1}{k}e_i$ trong biểu thức trên và thu được

$$a_i - b_i = \varphi\left(\frac{1}{k}e_i\right).$$

Do $\lim_{h\to 0_{\mathbb{R}^n}} \varphi(h) = 0$ nên suy ra $\lim_{k\to\infty} \varphi\left(\frac{1}{k}e_i\right) = 0$, và do đó $a_i = b_i$. Vậy $a = b$, ta kết thúc chứng minh. □

3.1.3 Điều kiện cần cho sự khả vi

Theo định nghĩa trên về sự khả vi của hàm nhiều biến, để khảo sát sự khả vi của hàm f tại x, ta cần trả lời được câu hỏi: có hay không một vector $a \in \mathbb{R}^n$ sao cho (3.1) hoặc (3.2) đúng? Việc trả lời câu hỏi này dường như không khả thi nếu như không tìm được mối liên hệ nào giữa vector a và hàm f. Định lý về điều kiện cần sau đây cho phép ta kết luận rằng, vector a thỏa mãn (3.1) nếu tồn tại, chính là vector gradient $\nabla f(x)$ của hàm f tại x. Nhờ kết quả này, việc khảo sát sự khả vi của hàm nhiều biến bằng Định nghĩa 3.1.6 trở nên thuận lợi hơn.

Định lý 3.1.9. *Cho tập mở $U \subset \mathbb{R}^n$ và hàm $f : U \to \mathbb{R}$ khả vi tại $x \in U$. Khi đó:*

i) Hàm f liên tục tại x.

ii) Vector gradient $\nabla f(x)$ tồn tại và $f'(x) = \nabla f(x)$.

Chứng minh. Do f khả vi tại x nên tồn tại $a = (a_1, a_2, ..., a_n) \in \mathbb{R}^n$ và $r > 0$ sao cho với mọi $h \in \mathbb{R}^n$ thỏa mãn $\|h\| < r$, ta có:

$$f(x+h) - f(x) = \langle a, h\rangle + \|h\|\varphi(h), \tag{3.3}$$

trong đó $\lim\limits_{h\to 0_{\mathbb{R}^n}} \varphi(h) = 0$. Cho $h \to 0_{\mathbb{R}^n}$ trong (3.3) và để ý rằng $|\langle a, h\rangle| \leq \|a\|\|h\|$, ta suy ra

$$\lim_{h\to 0_{\mathbb{R}^n}} f(x+h) = f(x).$$

Do đó hàm f liên tục tại x, i) được chứng minh.

Với mỗi $i = 1, 2, ..., n$ và mọi t thỏa mãn $0 < |t| < r$, ta có thể thay $h = te_i$ vào (3.3) để thu được:

$$f(x+te_i) - f(x) = t\langle a, e_i\rangle + \|te_i\|\varphi(te_i).$$

Chia hai vế cho t, đồng thời để ý rằng $\langle a, e_i\rangle = a_i$ và $\|te_i\| = |t|$, ta suy ra được:

$$\frac{f(x+te_i) - f(x)}{t} = a_i + \frac{|t|}{t}\varphi(te_i).$$

Cho $t \to 0$ và lưu ý rằng $\lim\limits_{t\to 0}\varphi(te_i) = 0$, ta nhận được: $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x) = a_i$. Từ đó suy ra $\nabla f(x) = a$. Vậy ta có khẳng định ii). □

Chú ý 3.1.10. Để xét sự khả vi của f tại x, ta làm theo hai bước:

i) Bước 1: tính gradient $\nabla f(x)$. Nếu $\nabla f(x)$ không tồn tại, kết luận f không khả vi tại x. Ngược lại, tiếp tục bước 2.

ii) Bước 2: nếu $\nabla f(x)$ tồn tại, xét hàm

$$\varphi(h) = \frac{f(x+h) - f(x) - \langle \nabla f(x), h\rangle}{\|h\|}, \qquad h \in \mathbb{R}^n \setminus \{0_{\mathbb{R}^n}\}.$$

Kết luận dựa trên mệnh đề: f khả vi tại $x \iff \lim\limits_{h\to 0_{\mathbb{R}^n}} \varphi(h) = 0$.

Trong trường hợp hàm hai biến, ta thường viết f theo hai biến (x, y)

và khảo sát sự khả vi của f tại $(x_0, y_0) \in U$. Khi đó ta thay vector $h = (s, t) \in \mathbb{R}^2$, tức là hàm φ có dạng:

$$\varphi(s,t) = \frac{f(x_0 + s, y_0 + t) - f(x_0, y_0) - \langle \nabla f(x_0, y_0), (s,t) \rangle}{\sqrt{s^2 + t^2}},$$

với $(s,t) \neq (0,0)$. Một cách tường minh:

$$\varphi(s,t) = \frac{f(x_0 + s, y_0 + t) - f(x_0, y_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)s - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)t}{\sqrt{s^2 + t^2}}.$$

Ví dụ 3.1.11. Khảo sát sự khả vi của hàm f tại $(0,0)$:

$$f(x,y) = \begin{cases} x + \dfrac{xy^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & \text{nếu } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{nếu } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Lời giải: Trước hết ta tính $\nabla f(0,0)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(t,0) - f(0,0)}{t} = 1.$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(0,t) - f(0,0)}{t} = 0.$$

Suy ra $\nabla f(0,0) = (1,0)$. Xét hàm

$$\varphi(s,t) = \frac{f(s,t) - f(0,0) - \langle \nabla f(0,0), (s,t) \rangle}{\sqrt{s^2 + t^2}} = \frac{st^2}{s^2 + t^2},$$

với $(s,t) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Dễ thấy

$$|\varphi(s,t)| \leq |s|, \quad \forall (s,t) \neq (0,0),$$

nên suy ra $\lim\limits_{(s,t) \to (0,0)} \varphi(s,t) = 0$. Do đó f khả vi tại $(0,0)$.

Nhận xét: Bài toán khảo sát tính khả vi của hàm f như trong ví dụ trên được quy về bài toán kiểm tra giới hạn $\lim\limits_{(s,t) \to (0,0)} \varphi(s,t)$ có bằng 0 hay không. Đây là bài toán tính giới hạn hàm nhiều biến đã được khảo sát rất kỹ ở chương trước đó.

3.1.4 Điều kiện đủ cho sự khả vi

Trước tiên ta nhắc lại định lý giá trị trung bình (Định lý Lagrange) cho hàm một biến. Định lý này sẽ được sử dụng nhiều trong các chứng minh sau này.

Định lý 3.1.12 (Định lý Lagrange cho hàm một biến)**.** *Giả sử hàm $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ liên tục trên $[a,b]$ và khả vi trên (a,b). Khi đó, tồn tại $c \in (a,b)$ sao cho:*

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Lưu ý rằng ta có thể phát biểu kết luận của định lý trên dưới dạng tương đương: tồn tại $\theta \in (0,1)$ sao cho:

$$f'(a+\theta(b-a)) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Trở lại với định lý về điều kiện đủ cho sự khả vi. Trước đó, trong Định lý 4.1.2, ta biết nếu hàm f khả vi thì các đạo hàm riêng của f tồn tại. Chiều ngược lại hiển nhiên không đúng. Câu hỏi đặt ra là ta có thể bổ sung thêm giả thiết gì để có thể kết luận chiều ngược lại. Định lý sau đây là một câu trả lời.

Định lý 3.1.13. *Cho tập mở $U \subset \mathbb{R}^n$, hàm $f : U \to \mathbb{R}$. Nếu các đạo hàm riêng của f tồn tại và liên tục trên U thì f khả vi trên U.*

Chứng minh. Để đơn giản, ta sẽ chứng minh định lý trong trường hợp hai biến. Phương pháp chứng minh hoàn toàn tương tự trong trường hợp nhiều hơn hai biến. Giả sử f là hàm hai biến, có các đạo hàm riêng liên tục trên U. Với mỗi $(x,y) \in U$, xét hàm

$$g(s,t) = f(x+s, y+t) - f(x,y) - \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)s - \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)t,$$

trong đó s, t đủ nhỏ sao cho $(x+s, y+t) \in U$. Áp dụng định lý giá trị trung bình Lagrange cho hàm một biến (Định lý 3.1.12), tồn tại $\theta_1 \in (0,1)$ sao cho:

$$f(x+s, y+t) - f(x, y+t) = \frac{\partial f}{\partial x}(x+\theta_1 s, y+t)s.$$

Hoàn toàn tương tự, tồn tại $\theta_2 \in (0,1)$ sao cho

$$f(x, y+t) - f(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y+\theta_2 t)t.$$

Từ đó ta thu được đánh giá sau:

$$\begin{aligned} g(s,t) &= [f(x+s,y+t) - f(x,y+t)] + [f(x,y+t) - f(x,y)] \\ &\qquad - \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)s - \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)t \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(x+\theta_1 s, y+t)s + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y+\theta_2 t)t - \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)s - \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)t \\ &= As + Bt, \end{aligned}$$

trong đó

$$\begin{aligned} A &= \frac{\partial f}{\partial x}(x+\theta_1 s, y+t) - \frac{\partial f}{\partial x}(x,y), \\ B &= \frac{\partial f}{\partial y}(x, y+\theta_2 t) - \frac{\partial f}{\partial y}(x,y). \end{aligned}$$

Sử dụng giả thiết về tính liên tục của các đạo hàm riêng $\frac{\partial f}{\partial x}$ và $\frac{\partial f}{\partial y}$ tại (x,y), ta có $\lim\limits_{(s,t)\to(0,0)} A = \lim\limits_{(s,t)\to(0,0)} B = 0$. Từ đây suy ra

$$\lim_{(s,t)\to(0,0)} \frac{g(s,t)}{\sqrt{s^2+t^2}} = \lim_{(s,t)\to(0,0)} \left(A\frac{s}{\sqrt{s^2+t^2}} + B\frac{t}{\sqrt{s^2+t^2}} \right) = 0.$$

□

3.2 Một số định lý về sự khả vi

3.2.1 Đạo hàm của tổng, tích, thương

Tương tự như hàm một biến, ta có thể xây dựng các kết quả về sự khả vi cho tổng, hiệu, tích và thương của hai hàm khả vi. Kết quả này được thể hiện trong định lý dưới đây.

Định lý 3.2.1. *Cho tập mở $U \subset \mathbb{R}^n$ và các hàm f, $g : U \to \mathbb{R}$ khả vi tại $x \in U$. Khi đó:*

i) Với c là hằng số thì hàm cf khả vi tại x và $(cf)'(x) = cf'(x)$.

ii) Hàm $f + g$ khả vi tại x và $(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$.

iii) Hàm fg khả vi tại x và $(fg)'(x) = f(x)g'(x) + g(x)f'(x)$.

iv) Giả sử $g(y) \neq 0$, với mọi $y \in U$. Khi đó, hàm $\dfrac{f}{g}$ khả vi tại x.

Chứng minh. Do f và g khả vi tại x nên tồn tại $r > 0$ sao cho với mọi $h \in \mathbb{R}^n$ thỏa mãn $\|h\| < r$, ta có:

$$\begin{aligned} f(x+h) - f(x) &= \langle f'(x), h\rangle + \|h\|\varphi(h), \\ g(x+h) - g(x) &= \langle g'(x), h\rangle + \|h\|\psi(h), \end{aligned}$$

trong đó $\lim\limits_{h\to 0_{\mathbb{R}^n}} \varphi(h) = \lim\limits_{h\to 0_{\mathbb{R}^n}} \psi(h) = 0$. Sự khả vi của các hàm cf và $f + g$ được suy ra khá dễ dàng từ định nghĩa. Để chứng minh sự khả vi của fg, với mọi $h \in B(0_{\mathbb{R}^n}, r)$, ta biểu diễn

$$\begin{aligned} A &:= (fg)(x+h) - (fg)(x) \\ &= f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x) \\ &= [f(x+h) - f(x)]\, g(x+h) + f(x)\, [g(x+h) - g(x)]\,. \end{aligned}$$

Kết hợp các đẳng thức đã có, ta thu được

$$\begin{aligned} A &= [\langle f'(x), h\rangle + \|h\|\varphi(h)]\, [g(x) + \langle g'(x), h\rangle + \|h\|\psi(h)] \\ &\quad + f(x)\, [\langle g'(x), h\rangle + \|h\|\psi(h)] \\ &= \langle g(x)f'(x) + f(x)g'(x), h\rangle + \|h\|\kappa(h), \end{aligned}$$

trong đó κ được xác định bởi

$$\begin{aligned} \kappa(h) = \frac{1}{\|h\|}&\langle f'(x), h\rangle\langle g'(x), h\rangle + \langle f'(x), h\rangle\psi(h) + g(x)\varphi(h) \\ &+ \langle g'(x), h\rangle\varphi(h) + \varphi(h)\psi(h) + f(x)\psi(h). \end{aligned}$$

Áp dụng bất đẳng thức Schwarz trong Định lý 1.1, ta có

$$\left|\frac{1}{\|h\|}\langle f'(x),h\rangle\langle g'(x),h\rangle\right| \leq \|f'(x)\|\|g'(x)\|\|h\|,$$

đồng thời kết hợp với giả thiết $\lim\limits_{h\to 0_{\mathbb{R}^n}} \varphi(h) = \lim\limits_{h\to 0_{\mathbb{R}^n}} \psi(h) = 0$, ta kết luận được $\lim\limits_{h\to 0_{\mathbb{R}^n}} \kappa(h) = 0$. Từ đó suy ra fg khả vi tại x và

$$(fg)'(x) = f(x)g'(x) + g(x)f'(x).$$

Chứng minh sự khả vi của hàm $\dfrac{f}{g}$ được để lại cho sinh viên như bài tập, với các tính toán phức tạp hơn đôi chút. □

3.2.2 Đạo hàm của hàm hợp

Để xây dựng được kết quả về đạo hàm của hàm hợp cho hàm nhiều biến, trước tiên, ta nhắc lại kết quả về đạo hàm của hàm hợp trong trường hợp hàm một biến.

Định lý 3.2.2. *Cho tập mở $U \subset \mathbb{R}$. Giả sử hàm $x : (a, b) \to U$ khả vi tại $t \in (a, b)$ và $f : U \to \mathbb{R}$ khả vi tại $x(t)$. Khi đó, hàm hợp $g = f \circ x$ khả vi tại t và*

$$g'(t) = f'(x(t))x'(t).$$

Khi khảo sát định lý tương tự cho trường hợp hàm nhiều biến, U sẽ là tập mở trong $\mathbb{R}^n$. Khi đó x là hàm có giá trị vector với n thành phần, mỗi thành phần là hàm một biến có giá trị thực. Cần lưu ý thêm rằng $f'(x(t))$ lúc này là vector gradient của hàm f, do đó $x'(t)$ cũng là vector tương ứng. Phép nhân trong vế phải bây giờ được thay thế bởi tích vô hướng. Với ý tưởng này, ta có thể chứng minh định lý đạo hàm của hàm hợp ứng với hàm nhiều biến như sau.

Định lý 3.2.3 (Đạo hàm của hàm hợp)**.** *Cho tập mở $U \subset \mathbb{R}^n$ và các hàm $x_i : (a, b) \to \mathbb{R}$, $i = \overline{1, n}$, sao cho*

$$x(t) = (x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t)) \in U, \ \forall t \in (a, b).$$

Giả sử tất cả các hàm x_i khả vi tại $t \in (a, b)$ và $f : U \to \mathbb{R}$ khả vi tại $x(t)$. Khi đó, hàm hợp $g = f \circ x$ khả vi tại t và

$$g'(t) = \langle \nabla f(x(t)), x'(t)\rangle,$$

trong đó $x'(t)$ được định nghĩa bởi

$$x'(t) = (x'_1(t), x'_2(t), ..., x'_n(t)).$$

Chứng minh. Do hàm f khả vi tại $x(t)$ nên tồn tại $r > 0$ sao cho với mọi $h \in \mathbb{R}^n$ sao cho $\|h\| < r$, ta có:

$$f(x(t) + h) - f(x(t)) = \langle \nabla f(x(t)), h \rangle + \|h\|\varphi(h), \tag{3.4}$$

trong đó $\lim\limits_{h \to 0_{\mathbb{R}^n}} \varphi(h) = 0$. Do x liên tục tại t nên tồn tại $\delta > 0$ sao cho với mọi $s \in \mathbb{R}$ thỏa mãn $0 < |s| < \delta$, ta có $\|x(t+s) - x(t)\| < r$. Khi đó, với $0 < |s| < \delta$ ta có thể chọn $h = x(t+s) - x(t)$ trong (3.4), đồng thời chia hai vế cho s, ta suy ra được:

$$\begin{aligned} \frac{f(x(t+s)) - f(x(t))}{s} &= \left\langle \nabla f(x(t)), \frac{x(t+s) - x(t)}{s} \right\rangle \\ &\quad + \left\| \frac{x(t+s) - x(t)}{s} \right\| \frac{|s|}{s} \varphi(x(t+s) - x(t)). \end{aligned} \tag{3.5}$$

Chú ý rằng $\lim\limits_{s \to 0} [x(t+s) - x(t)] = 0_{\mathbb{R}^n}$ và

$$\lim_{s \to 0} \frac{x(t+s) - x(t)}{s} = x'(t).$$

Từ đó, cho $s \to 0$ trong (3.5), ta thu được điều phải chứng minh. □

3.2.3 Định lý giá trị trung bình

Trong trường hợp hàm một biến, định lý giá trị trung bình là định lý Lagrange (Định lý 3.1.12). Bằng cách thay a bởi x và thay b bởi $x + h$, ta có thể viết lại định lý này theo một dạng khác. Cụ thể, nếu hàm $f : [x, x+h] \to \mathbb{R}$ liên tục trên $[x, x+h]$ và khả vi trên $(x, x+h)$ thì tồn tại $\theta \in (0, 1)$ sao cho

$$f(x+h) - f(x) = f'(x + \theta h)h.$$

Tương tự như các kết quả trước đó, để mở rộng định lý giá trị trung bình cho trường hợp hàm nhiều biến, ta để ý rằng $f'(x+\theta h)$ và h là hai vector trong $\mathbb{R}^n$, do đó tích này được hiểu thành tích vô hướng trong $\mathbb{R}^n$.

Định lý 3.2.4 (Định lý giá trị trung bình). *Cho tập mở $U \subset \mathbb{R}^n$, hàm $f : U \to \mathbb{R}$ khả vi trên U. Giả sử $x \in U$ và $h \in \mathbb{R}^n$ sao cho*

$$x + th \in U, \ \forall t \in [0,1].$$

Khi đó, tồn tại $\theta \in (0,1)$ sao cho:

$$f(x+h) - f(x) = \langle \nabla f(x+\theta h), h \rangle.$$

Chứng minh. Với $x \in U$ và $h \in \mathbb{R}^n$, ta xét hàm một biến

$$g(t) = f(x+th), \quad t \in [0,1].$$

Do f khả vi trên U nên g khả vi trên $(0,1)$ và liên tục trên $[0,1]$. Áp dụng định lý Lagrange (Định lý 3.1.12) cho hàm g, suy ra tồn tại $\theta \in (0,1)$ sao cho:

$$g(1) - g(0) = g'(\theta).$$

Theo Định lý 3.2.3, ta có:

$$g'(\theta) = \langle \nabla f(x+\theta h), h \rangle.$$

Từ đó suy ra đẳng thức cần chứng minh. □

Hệ quả 3.2.5 (Đạo hàm của hàm hằng). *Cho U là tập mở và liên thông đường trong $\mathbb{R}^n$, hàm $f : U \to \mathbb{R}$ khả vi trên U. Giả sử*

$$\nabla f(x) = 0_{\mathbb{R}^n}, \ \forall x \in U.$$

Khi đó f là hàm số hằng trên U.

Chứng minh. Cố định $x_0 \in U$ và lấy $x \in U$ bất kỳ. Do U mở và liên thông đường nên có đường gấp khúc có các đỉnh lần lượt là

$$x_0, \ x_1, \ x_2, ..., x_k, \ x_{k+1} = x.$$

Lần lượt áp dụng Định lý 3.2.4 cho hàm f trên các đoạn $[x_i, x_{i+1}]$, với mọi $i = \overline{0, k}$, ta thu được

$$f(x_{i+1}) = f(x_i).$$

Từ đó suy ra $f(x) = f(x_0)$. Vậy f là hàm hằng trên U. □

3.3 Đạo hàm riêng bậc cao

3.3.1 Đạo hàm riêng bậc hai

Định nghĩa 3.3.1. *Cho U là tập mở trong $\mathbb{R}^n$ và hàm $f : U \to \mathbb{R}$. Giả sử các đạo hàm riêng của f tồn tại trên U. Với mỗi cặp số $i, j \in \{1, 2, ..., n\}$, ta định nghĩa đạo hàm riêng bậc hai của hàm f theo biến x_i, x_j là đại lượng*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x) := \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)(x) = \lim_{t \to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x_i}(x + te_j) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)}{t},$$

nếu giới hạn trên tồn tại hữu hạn.

Nếu $i = j$, ta ký hiệu $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(x)$ thay cho $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_i}(x)$. Các đạo hàm riêng bậc cao hơn có thể định nghĩa hoàn toàn tương tự.

Ví dụ 3.3.2. Cho hàm số

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2}, & \text{nếu } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & \text{nếu } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Tính các đạo hàm riêng bậc hai của hàm f tại $(0, 0)$, nếu tồn tại. Có nhận xét gì về $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0)$ và $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0)$?

Câu hỏi đặt ra là trong trường hợp nào thì ta có thể kết luận

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x).$$

Định lý 3.3.3 (Định lý Schwarz). *Nếu các đạo hàm riêng bậc hai* $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}, \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ *tồn tại trên* U *mở chứa* x *và liên tục tại* x *thì*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x).$$

Chứng minh. Xét

$$A = f(x + te_i + se_j) - f(x + te_i) - f(x + se_j) + f(x),$$

với $t, s \in \mathbb{R}$ đủ bé. Ta biểu diễn A theo hai cách. Đầu tiên, đặt

$$\varphi(t) = f(x + te_i + se_j) - f(x + te_i).$$

Khi đó, áp dụng định lý Lagrange cho hàm φ (Định lý 3.1.12), tồn tại $\theta_1, \theta_2 \in (0, 1)$ sao cho:

$$\begin{aligned} A &= \varphi(t) - \varphi(0) = t\varphi'(\theta_1 t) \\ &= t\left[\frac{\partial f}{\partial x_i}(x + \theta_1 te_i + se_j) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(x + \theta_1 te_i)\right] \\ &= ts\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x + \theta_1 te_i + \theta_2 se_j). \end{aligned}$$

Tương tự, thay đổi vai trò của s và t, ta cũng chỉ ra được tồn tại $\alpha_1, \alpha_2 \in (0, 1)$ sao cho:

$$A = ts\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x + \alpha_1 te_i + \alpha_2 se_j).$$

Từ đó suy ra:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x + \theta_1 te_i + \theta_2 se_j) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x + \alpha_1 te_i + \alpha_2 se_j),$$

với mọi s, t khác 0, đủ nhỏ. Từ tính liên tục của các đạo hàm riêng bậc hai, suy ra điều phải chứng minh. □

3.3.2 Công thức Taylor

Cho hàm f xác định trên tập mở $U \subset \mathbb{R}^n$. Giả sử $a \in U$ và $h \in \mathbb{R}^n$ sao cho

$$a + th \in U, \quad \forall t \in [0; 1].$$

Xét hàm số một biến $F : [0; 1] \to \mathbb{R}$, xác định bởi

$$F(t) = f(a + th).$$

Định lý 3.3.4. *Giả sử f có các đạo hàm riêng liên tục đến cấp $k \geq 1$. Khi đó, tồn tại $\theta \in (0, 1)$ sao cho:*

$$f(a + h) = f(a) + \frac{F'(0)}{1!} + \frac{F''(0)}{2!} + ... + \frac{F^{k-1}(0)}{(k-1)!} + \frac{F^k(\theta)}{k!}.$$

Chứng minh. Do f có các đạo hàm riêng liên tục đến cấp $k \geq 1$ trên U (ta thường viết $f \in C^k(U)$) nên theo định lý đạo hàm của hàm hợp, ta suy ra F khả vi liên tục đến cấp k trên $[0, 1]$ ($F \in C^k([0, 1])$). Sử dụng công thức Taylor cho hàm một biến F, tồn tại $\theta \in (0, 1)$ sao cho:

$$F(1) = F(0) + \frac{F'(0)}{1!} + \frac{F''(0)}{2!} + ... + \frac{F^{k-1}(0)}{(k-1)!} + \frac{F^k(\theta)}{k!}.$$

Để rằng $F(1) = f(a+h)$ và $F(0) = f(a)$, ta thu được biểu thức cần chứng minh. □

Trong biểu thức khai triển Taylor ở trên, ta để ý rằng hàm F là hàm một biến. Do đó việc tính đạo hàm các cấp của hàm F là có thể thực hiện được, thông qua công thức đạo hàm của hàm hợp trong Định lý 3.2.3. Khi đó, đạo hàm cấp k của hàm F sẽ được biểu diễn thông qua các đạo hàm riêng cấp k của hàm f. Mặc dù vậy, biểu diễn tường minh của các đạo hàm này không dễ dàng trong trường hợp tổng quát. Do đó, trong học phần này, công thức Taylor được viết dưới dạng như trên, thay vì biểu diễn qua các đạo hàm riêng của hàm f. Dưới đây là một vài gợi ý cho việc tính toán đạo hàm các cấp của hàm F.

Xét hàm giá trị vector $x : [0, 1] \to U$ xác định bởi $x(t) = a + th$, nghĩa là

$$x(t) = (a_1 + th_1, a_2 + th_2, ..., a_n + th_n).$$

Khi đó, ta có thể viết lại $F = f \circ x$. Để tính đạo hàm cấp 1 của hàm F, ta sử dụng Định lý 3.2.3, thu được:

$$F'(t) = \langle \nabla f(x(t)), x'(t) \rangle.$$

Lưu ý rằng $\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)$ và $x'(t) = h = (h_1, h_2, ..., h_n)$. Từ đó dẫn đến

$$\begin{aligned} F'(t) &= \frac{\partial f}{\partial x_1}(a+th)h_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(a+th)h_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(a+th)h_n \\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a+th)h_i. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Tại $t = 0$, ta được:

$$F'(0) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)h_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(a)h_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)h_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)h_i.$$

Tiếp theo, để tính đạo hàm cấp hai của hàm F, ta sẽ tính các đạo hàm của hàm G_i xác định bởi

$$G_i(t) = g_i(a+th), \quad \text{với } g_i = \frac{\partial f}{\partial x_i},\ i = 1, 2, ..., n.$$

Tương tự như trên, ta biểu diễn $G_j = g_j \circ x$ và thu được:

$$\begin{aligned} G_i'(t) &= \langle \nabla g_i(x(t)), x'(t) \rangle \\ &= \frac{\partial g_i}{\partial x_1}(a+th)h_1 + \frac{\partial g_i}{\partial x_2}(a+th)h_2 + \cdots + \frac{\partial g_i}{\partial x_n}(a+th)h_n \\ &= \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial g_i}{\partial x_j}(a+th)h_j \\ &= \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a+th)h_j. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Kết hợp (3.6) vào (3.7), ta suy ra được:

$$F''(t) = \sum_{i=1}^{n} G_i'(t)h_i = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a+th)h_i h_j. \tag{3.8}$$

Tại $t = 0$, ta có:

$$F''(0) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a)h_i h_j.$$

Với ý tưởng hoàn toàn tương tự, ta có thể biểu diễn được đạo hàm cấp cao của hàm F thông qua các đạo hàm riêng cùng cấp của hàm f. Chẳng hạn, ta sẽ tính được:

$$F'''(t) = \sum_{i,j,k=1}^{n} \frac{\partial^3 f}{\partial x_k \partial x_j \partial x_i}(a+th)h_i h_j h_k. \tag{3.9}$$

Mặc dù phương pháp tính toán khá rõ ràng, tuy nhiên việc biểu diễn tường minh biểu thức trong trường hợp đạo hàm cấp cao trở nên phức tạp về mặt hình thức. Công thức Taylor sẽ được biểu diễn chính xác thông qua một vài khái niệm mới về các dạng k-tuyến tính, sẽ được thảo luận trong học phần nối tiếp về phép tính vi phân trên không gian hữu hạn chiều.

Ví dụ 3.3.5.

i) Giả sử U mở, $f : U \to \mathbb{R}^2$ và $(0,0) \in U$. Lấy $h = (x,y) \in \mathbb{R}^2$ sao cho $B(0_{\mathbb{R}^2}, 2\|h\|) \subset U$. Xét hàm số $F : [0;1] \to \mathbb{R}$ xác định bởi $F(t) = f(th)$. Viết biểu thức tường minh của $F'(0)$, $F''(0)$, $F'''(0)$.

ii) Viết khai triển Taylor đến bậc 4 của hàm $f(x,y) = \sin(x+y)$.

3.3.3 Định nghĩa vi phân

Ký hiệu $\Delta x := (\Delta x_1, \Delta x_2, ..., \Delta x_n)$ là số gia của biến x. Ta gọi số gia của hàm số f là đại lượng

$$\Delta f(x) := f(x+\Delta x) - f(x).$$

Khi đó, nếu f khả vi tại x thì ta có:

$$\Delta f(x) = \langle \nabla f(x), \Delta x\rangle + \|\Delta x\|\varphi(\|\Delta x\|),$$

trong đó $\lim\limits_{h\to 0}\varphi(h) = 0$. Ta gọi đại lượng $\langle \nabla f(x), \Delta x\rangle$ là vi phân toàn phần của f tại x ứng với số gia Δx, được ký hiệu là $df(x)$:

$$df(x) = \langle \nabla f(x), \Delta x\rangle = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x)\Delta x_1 + ... + \frac{\partial f}{\partial x_n}(x)\Delta x_n.$$

Người ta thường viết dx_i thay cho Δx_i, tức là

$$df(x) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x)dx_1 + ... + \frac{\partial f}{\partial x_n}(x)dx_n.$$

Ví dụ 3.3.6. Trong trường hợp hàm hai biến, giả sử ta nói rằng $P(x,y)dx+Q(x,y)dy$ là vi phân toàn phần của một hàm hai biến U, nghĩa là

$$\frac{\partial U}{\partial x}(x,y) = P(x,y) \text{ và } \frac{\partial U}{\partial y}(x,y) = Q(x,y).$$

Dùng vi phân để tính gần đúng

Khi $\|\Delta x\|$ đủ nhỏ thì $\Delta f(x) \approx df(x)$. Do đó, người ta thường dùng công thức này để tính gần đúng giá trị của $f(x+\Delta x)$ khi có thể dễ dàng tính được giá trị của $f(x)$ và vi phân toàn phần $df(x)$.

Giả sử hàm f có các đạo hàm riêng liên tục đến cấp k trong miền mở $U \subset \mathbb{R}^n$. Với các số nguyên không âm $m_1 + m_2 + ... + m_n \leq k$, phép lấy đạo hàm

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{m_1}\left(\frac{\partial}{\partial x_2}\right)^{m_2}...\left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{m_n}$$

được gọi là toán tử vi phân đơn cấp $m = m_1 + m_2 + ... + m_n$. Tổng của các toán tử vi phân đơn và tích của một số thực với toán tử vi phân đơn được gọi là toán tử vi phân.

BÀI TẬP CHƯƠNG 3

Mục tiêu cơ bản của Chương 3:

- Tính được đạo hàm riêng các cấp cho các hàm số hai biến và hàm số ba biến cụ thể.
- Xét được tính liên tục của các đạo hàm riêng cho các hàm hai biến.
- Khảo sát được sự khả vi của các hàm hai biến không chứa tham số và có chứa tham số.
- Giải thích được mối liên hệ giữa các khái niệm hàm số bị chặn, liên tục, có đạo hàm riêng, có đạo hàm theo mọi hướng và khả vi.
- Phát biểu và chứng minh được các định lý liên quan đến sự khả vi của hàm nhiều biến.
- Vận dụng được định nghĩa và các định lý cơ bản về sự khả vi để giải một số bài tập tương tự các định lý trong lý thuyết.

1. Xét tính khả vi của các hàm số sau tại điểm $(0,0)$:
   (a) $f(x,y) = \sqrt{|xy|}$.
   (b) $f(x,y) = \sqrt{|x^2y|}$.
   (c) $f(x,y) = \sqrt{x^4+y^4}$.
   (d) $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$.
   (e) $f(x,y) = \sqrt[3]{x^3+y^3}$.

2. Xét tính khả vi của các hàm số sau tại điểm $(0,0)$:
   (a) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y}{\sqrt{2x^2+y^2}}, & \text{nếu } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{nếu } (x,y) = (0,0). \end{cases}$
   (b) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^5-y^4}{x^2+y^2}, & \text{nếu } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{nếu } (x,y) = (0,0). \end{cases}$

(c) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3+y^3}{\sqrt{x^4+2y^4}}, & \text{nếu } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{nếu } (x,y) = (0,0). \end{cases}$

(d) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy(x^2-y)}{\sqrt{x^4+y^2}}, & \text{nếu } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{nếu } (x,y) = (0,0). \end{cases}$

(e) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^6|y|-y^4}{x^4+y^2}, & \text{nếu } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{nếu } (x,y) = (0,0). \end{cases}$

3. Xét tính khả vi của các hàm số sau tại điểm $(0,0)$:

(a) $f(x,y) = \begin{cases} \left(x^3-xy\right)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}, & \text{nếu } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{nếu } (x,y) = (0,0). \end{cases}$

(b) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x(1-y-e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}}, & \text{nếu } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{nếu } (x,y) = (0,0). \end{cases}$

(c) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy-\sin(xy)}{x^4+y^4}, & \text{nếu } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{nếu } (x,y) = (0,0). \end{cases}$

(d) $f(x,y) = \begin{cases} \cos x + \dfrac{x^2y}{\sqrt{x^2+y^2}}, & \text{nếu } (x,y) \neq (0,0), \\ 1, & \text{nếu } (x,y) = (0,0). \end{cases}$

(e) $f(x,y) = \begin{cases} e^x + \dfrac{1-\cos(xy)}{\sqrt{x^2+y^2}}, & \text{nếu } (x,y) \neq (0,0), \\ 1, & \text{nếu } (x,y) = (0,0). \end{cases}$

(f) $f(x,y) = \begin{cases} (x-y)^2\cos\dfrac{1}{(x-y)^2}, & \text{nếu } x \neq y, \\ 0, & \text{nếu } x = y. \end{cases}$

4. Cho $a > 0$ và hàm f xác định bởi

$$f(x,y) = \begin{cases} \sin x + \dfrac{x^2\sin y}{(x^2+y^2)^a}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

(a) Xét sự khả vi của f tại $(0,0)$ trong trường hợp $a = \frac{1}{3}$.

(b) Tìm tất cả các giá trị của a để f khả vi tại $(0,0)$.

5. Cho $a > 0$ và hàm f xác định bởi

$$f(x,y) = \begin{cases} x + y^2 \sin \dfrac{1}{(x^2+y^2)^a}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

(a) Xét sự khả vi của f tại $(0,0)$ trong trường hợp $a = 1$.

(b) Xét sự khả vi của f trên $\mathbb{R}^2$ theo a.

6. Cho $f(x,y) = |x^2 - y^2|$ trên $\mathbb{R}^2$. Xét các tập hợp

$$U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 > y^2\},$$
$$V = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 < y^2\},$$
$$W = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 = y^2\}.$$

(a) Chứng minh rằng U và V là hai tập mở trong $\mathbb{R}^2$.

(b) Tính các đạo hàm riêng của f tại mọi $(x_0, y_0) \in U$.

(c) Tính các đạo hàm riêng của f tại mọi $(x_0, y_0) \in V$.

(d) Tính các đạo hàm riêng của f tại mọi $(x_0, y_0) \in W$.

(e) Xét sự khả vi của f tại mọi $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ và tính đạo hàm nếu có.

7. Cho $g(x,y) = |y - x^2|$ trên $\mathbb{R}^2$.

(a) Tính các đạo hàm riêng của g tại mọi $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$.

(b) Xét sự khả vi của g tại mọi $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ và tính đạo hàm nếu có.

8. Cho $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ thỏa

$$f(tx) = tf(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \ \forall t \in \mathbb{R}.$$

Giả sử f khả vi tại $0_{\mathbb{R}^n}$. Chứng minh rằng

$$f(x) = \langle \nabla f(0), x \rangle, \ \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

9. Cho U là tập mở trong $\mathbb{R}^n$ và $f : U \to \mathbb{R}$. Với $x \in U$ cố định và $u \in \mathbb{R}^n \setminus \{0_{\mathbb{R}^n}\}$, ta định nghĩa đạo hàm theo hướng u của f tại x là đại lượng

$$D_u f(x) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x+tu) - f(x)}{t},$$

nếu giới hạn tồn tại hữu hạn. Chứng minh rằng nếu f khả vi tại x thì f có đạo hàm theo mọi hướng tại x.

10. Cho hai hàm số f và g xác định bởi

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^4}, & \text{nếu } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{nếu } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

$$g(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^3}{x^2+y^6}, & \text{nếu } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{nếu } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

(a) Xét tính liên tục của f và g tại $(0,0)$.

(b) Cho $u = (a,b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0_{\mathbb{R}^2}\}$, tính $D_u f(0,0)$ và $D_u g(0,0)$.

11. Cho $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ định bởi:

$$f(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{nếu } |y| \geq x^2 \text{ hoặc } y = 0, \\ 0, & \text{nơi khác.} \end{cases}$$

Chứng minh rằng $D_u f(0,0) = 0$, $\forall u \neq 0_{\mathbb{R}^2}$, nhưng hàm f không liên tục tại $(0,0)$.

12. Cho U là tập mở trong $\mathbb{R}^n$, hàm $f : U \to \mathbb{R}$ và $x \in U$. Xét mối liên hệ giữa các mệnh đề sau đây:

(a) Hàm f liên tục tại x.

(b) Hàm f có các đạo hàm riêng tại x.

(c) Hàm f có đạo hàm theo mọi hướng tại x.

13. Cho hàm hai biến xác định bởi

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2+y^2} e^{-\dfrac{1}{x^2+y^2}}, & \text{nếu } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{nếu } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Tính các đạo hàm riêng bậc hai của hàm f tại $(0,0)$.

14. Cho hàm hai biến xác định bởi

$$f(x,y) = \begin{cases} y + x^3 \sin \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2+y^2}}, & \text{nếu } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{nếu } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Tính các đạo hàm riêng bậc hai của hàm f tại $(0,0)$.

Chương 4

Cực trị của hàm nhiều biến

4.1 Cực trị địa phương không điều kiện

4.1.1 Định nghĩa và định lý điều kiện cần

Định nghĩa 4.1.1. *Giả sử hàm f xác định trên tập mở $U \subset \mathbb{R}^n$ và $x_0 \in U$. Khi đó, ta nói rằng:*

i) Hàm f đạt cực đại địa phương tại x_0 nếu tồn tại $r > 0$ sao cho

$$f(x) \leq f(x_0), \quad \forall x \in B(x_0, r).$$

ii) Hàm f đạt cực tiểu địa phương tại x_0 nếu tồn tại $r > 0$ sao cho

$$f(x) \geq f(x_0), \quad \forall x \in B(x_0, r).$$

Cực đại địa phương và cực tiểu địa phương được gọi tắt là cực đại và cực tiểu. Cực đại và cực tiểu được gọi chung là cực trị.

Đối với hàm một biến, ta biết rằng nếu hàm f xác định trên (a, b), có đạo hàm và đạt cực trị tại $x_0 \in (a, b)$ thì $f'(x_0) = 0$. Một cách đơn giản, ta nói rằng nếu f có đạo hàm và đạt cực trị tại x_0 thì x_0 là điểm dừng của hàm f. Kết quả này được mở rộng một cách tự nhiên cho trường hợp hàm nhiều biến. Định lý sau đây đưa ra điều kiện cần để hàm f đạt cực trị.

Định lý 4.1.2 (Điều kiện cần)**.** *Cho U mở trong $\mathbb{R}^n$, $f : U \to \mathbb{R}$ và $x_0 \in U$. Giả sử các đạo hàm riêng của f tại x_0 tồn tại. Nếu f đạt cực trị tại x_0 thì $\nabla f(x_0) = 0_{\mathbb{R}^n}$.*

Chứng minh. Với mỗi $i = 1, 2, ..., n$ cố định, đặt $g(t) = f(x_0 + te_i)$. Để ý rằng g có đạo hàm tại 0 và

$$g'(0) = \lim_{t\to 0} \frac{g(t) - g(0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f(x_0 + te_i) - f(x_0)}{t} = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0).$$

Ngoài ra, do f đạt cực trị tại x_0 nên g đạt cực trị tại 0. Suy ra $g'(0) = 0$, nghĩa là $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) = 0$. Vậy $\nabla f(x_0) = 0_{\mathbb{R}^n}$. □

Các điểm $x_0 \in U$ thỏa mãn $\nabla f(x_0) = 0_{\mathbb{R}^n}$ gọi là *điểm dừng* của f. Để tìm cực trị của f, trước hết người ta thường tìm tập hợp tất cả các điểm dừng của hàm f, sau đó xác định cực trị dựa trên các điểm dừng này.

Cần lưu ý rằng chiều ngược lại của Định lý 4.1.2 có thể không đúng, tức là nếu x_0 là một điểm dừng của hàm f thì chưa chắc f đạt cực trị tại x_0. Đặc biệt, ngay cả khi hàm f có vô số điểm dừng, ta cũng không thể khẳng định hàm f đạt cực trị địa phương.

Ví dụ 4.1.3. Xét hàm hai biến $f(x, y) = x \sin y$. Ta có:

$$\nabla f(x, y) = (\sin y, x \cos y).$$

Ta thấy hàm f có vô số điểm dừng là $(0, k\pi)$ với mọi $k \in \mathbb{Z}$. Tuy nhiên, do $f(0, k\pi) = 0$ và f có thể đổi dấu trong lân cận của điểm dừng $(0, k\pi)$ nên hàm này không đạt cực trị địa phương tại bất kỳ điểm dừng nào.

4.1.2 Ý tưởng xây dựng định lý điều kiện đủ

Ví dụ 4.1.3 thể hiện rằng sự tồn tại của các điểm dừng chưa thể bảo đảm sự tồn tại của các điểm cực trị. Trong trường hợp hàm một biến, ta có thể sử dụng bảng biến thiên để kết luận cực trị của hàm số tại các điểm dừng. Tuy nhiên, khái niệm này không còn phù hợp khi khảo sát hàm nhiều biến. Thay vào đó, ta có thể khảo sát cực trị thông qua đạo hàm bậc hai tại điểm dừng.

Với phân tích này, để đưa ra điều kiện đủ để hàm nhiều biến đạt cực trị tại điểm dừng, trước hết ta nhắc lại điều kiện đủ trong trường hợp hàm một biến.

Định lý 4.1.4 (Điều kiện đủ cho hàm một biến). *Cho U mở trong $\mathbb{R}$ và $f : U \to \mathbb{R}$. Giả sử $f \in C^2(U)$ và $x_0 \in U$ là một điểm dừng của f. Khi đó, xảy ra một số trường hợp sau đây:*

i) Nếu $f''(x_0) > 0$ thì f đạt cực tiểu tại x_0.

ii) Nếu $f''(x_0) < 0$ thì f đạt cực đại tại x_0.

iii) Nếu $f''(x_0) = 0$ thì chưa thể kết luận được về cực trị của f tại x_0.

Chứng minh. Ta chứng minh i), các mệnh đề còn lại được chứng minh hoàn toàn tương tự. Giả sử $f''(x_0) > 0$, vì f'' liên tục tại x_0 nên tồn tại lân cận $V \subset U$ của x_0 sao cho

$$f''(x) > 0, \ \forall x \in V.$$

Với mọi $x \in V$, sử dụng công thức Taylor tại x_0, ta có:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}f''(c)(x - x_0)^2,$$

với c nằm giữa x_0 và x. Do x_0 là điểm dừng của f nên $f'(x_0) = 0$, từ đó ta suy ra được:

$$f(x) - f(x_0) = \frac{1}{2}f''(c)(x - x_0)^2 \geq 0.$$

Vậy x_0 là điểm cực tiểu của f. □

Để ý rằng nếu $f''(x_0) = 0$, giả thiết của định lý chưa đủ để kết luận về cực trị tại điểm dừng x_0. Khi đó, người ta thường dùng định nghĩa cực trị để kiểm tra. Dưới đây là một ví dụ đơn giản trong trường hợp này.

Ví dụ 4.1.5. Xét hai hàm $f(x) = x^3$ và $g(x) = x^4$, $x \in \mathbb{R}$. Ta thấy $x_0 = 0$ là điểm dừng duy nhất của cả hai hàm f và g, đồng thời $f''(0) = g''(0) = 0$. Tuy nhiên, hàm f không đạt cực trị tại $x_0 = 0$ nhưng hàm g đạt cực tiểu tại $x_0 = 0$. Thật vậy, đối với hàm g, ta có

$$g(x) = x^4 \geq 0 = g(0), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Điều này chứng tỏ g đạt giá trị nhỏ nhất tại x_0 trong lân cận của điểm x_0. Do đó, g đạt cực tiểu tại x_0. Đối với hàm f, ta thấy rằng:

$$f(-1/n) = -1/n^3 < f(0) = 0 < f(1/n) = 1/n^3, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Bất đẳng thức này chứng tỏ trong mọi lân cận $(-r,r)$ (với $r>0$) của điểm $x_0=0$, ta luôn tìm được hai điểm $x_1<0$ và $x_2>0$ sao cho $f(x_1)<f(x_0)<f(x_2)$. Như vậy, hàm f không thể đạt cực trị tại x_0.

Trong trường hợp hàm nhiều biến, ta sẽ mô tả ý tưởng hình thành điều kiện đủ để hàm số đạt cực trị tại điểm dừng dựa trên việc mở rộng chứng minh cho hàm một biến.

Xét U mở trong $\mathbb{R}^n$ và $f: U\to\mathbb{R}$. Giả sử $f\in C^2(U)$ (ở đây ta ký hiệu $C^2(U)$ là tập hợp các hàm có các đạo hàm riêng cấp ≤ 2 liên tục trên U) và $x_0\in U$ là một điểm dừng của f. Sử dụng công thức Taylor tại x_0, tồn tại $\theta\in(0,1)$ sao cho

$$f(x_0+h)-f(x_0)=\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial^2 f}{\partial x_j\partial x_i}(x_0+\theta h)h_ih_j.$$

Tương tự trường hợp hàm một biến, nhờ tính liên tục của các đạo hàm riêng cấp 2 của hàm f, ta mong đợi rằng hàm f đạt cực tiểu tại x_0 (tức là vế phải của biểu thức trên không âm) nếu giả thiết sau thỏa mãn:

$$\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial^2 f}{\partial x_j\partial x_i}(x_0)h_ih_j>0,\quad \forall h\neq 0_{\mathbb{R}^n}. \tag{4.1}$$

Bằng cách đặt

$$a_{ij}=\frac{\partial^2 f}{\partial x_j\partial x_i}(x_0),\quad i,j\in\{1,2,...,n\},$$

và dạng toàn phương A xác định bởi

$$A(h)=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}h_ih_j,\quad h=(h_1,h_2,...,h_n)\in\mathbb{R}^n,$$

ta có thể viết lại (4.1) dưới dạng

$$A(h)>0,\quad \forall h\neq 0_{\mathbb{R}^n}.$$

Giả thiết này thể hiện rằng A là một dạng toàn phương xác định dương. Với các phân tích này, ta có lý do để tin rằng nếu A là dạng toàn phương xác định dương thì hàm f đạt cực tiểu tại điểm dừng x_0.

Từ ý tưởng trên, ta thấy rằng để kết luận được cực trị của hàm f tại điểm dừng x_0, ta sẽ khảo sát dạng toàn phương liên kết với một ma trận tương ứng là ma trận các đạo hàm riêng bậc hai của hàm f tại x_0. Đây là ma trận vuông cấp n và thường được gọi là ma trận Hess của hàm f tại x_0, được xác định bởi

$$A = (a_{ij}), \qquad \text{với } a_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x_0),\ \ i, j \in \{1, 2, ..., n\}.$$

Lưu ý rằng người ta thường đồng nhất ký hiệu giữa dạng toàn phương A và ma trận đại diện của nó. Ngoài ra, với giả thiết $f \in C^2(U)$, bằng cách áp dụng định lý Schwarz, ta có thể suy ra ma trận Hess A là một ma trận đối xứng.

4.1.3 Một số kết quả về dạng toàn phương

Các kiến thức liên quan đến dạng toàn phương thường được thảo luận trong các học phần đại số tuyến tính. Tuy nhiên, để thuận lợi trong việc sử dụng kiến thức về dạng toàn phương ở học phần này, ta tóm tắt một vài định nghĩa và định lý thường được sử dụng.

Dưới đây là một số định nghĩa liên quan đến dạng toàn phương và việc xác định dấu cho dạng toàn phương.

Định nghĩa 4.1.6. *Cho $A(u)$ là dạng toàn phương trên $\mathbb{R}^n$, tức là ánh xạ A có dạng*

$$A(u) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} u_i u_j, \quad u = (u_1, u_2, ..., u_n) \in \mathbb{R}^n, \tag{4.2}$$

trong đó $a_{ij} \in \mathbb{R}$. Khi đó:

i) $A(u)$ được gọi là xác định dương nếu

$$A(u) > 0, \quad \forall u \neq 0_{\mathbb{R}^n}.$$

ii) $A(u)$ được gọi là xác định âm nếu

$$A(u) < 0, \quad \forall u \neq 0_{\mathbb{R}^n}.$$

iii) $A(u)$ được gọi là không xác định nếu

$$\exists u, u' \in \mathbb{R}^n \text{ sao cho } A(u) > 0 \text{ và } A(u') < 0.$$

iv) $A(u)$ được gọi là nửa xác định dương nếu

$$A(u) \geq 0,\ \forall u \in \mathbb{R}^n \text{ và } \exists u_0 \neq 0_{\mathbb{R}^n} \text{ sao cho } A(u_0) = 0.$$

v) $A(u)$ được gọi là nửa xác định âm nếu

$$A(u) \leq 0,\ \forall u \in \mathbb{R}^n \text{ và } \exists u_0 \neq 0_{\mathbb{R}^n} \text{ sao cho } A(u_0) = 0.$$

Ví dụ 4.1.7. Xét dạng toàn phương A trong $\mathbb{R}^2$ được xác định bởi các trường hợp dưới đây.

a) $A(u_1, u_2) = u_1^2 + 2u_1u_2 + 3u_2^2$. Đây là dạng toàn phương xác định dương. Thật vậy, ta thấy

$$A(u_1, u_2) = (u_1 + u_2)^2 + 2u_2^2 \geq 0, \quad \forall (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2,$$

đồng thời đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $(u_1, u_2) = (0, 0)$.

b) $A(u_1, u_2) = -u_1^2 - u_2^2$. Đây là dạng toàn phương xác định âm vì $A(u_1, u_2) \leq 0,\ \forall (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$ và đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $(u_1, u_2) = (0, 0)$.

c) $A(u_1, u_2) = u_1^2 - 2u_1u_2 + u_2^2$. Đây là dạng toàn phương nửa xác định dương vì $A(u_1, u_2) \geq 0,\ \forall (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$ và $A(1, 1) = 0$.

d) $A(u_1, u_2) = u_1^2 + 2u_1u_2 - u_2^2$. Đây là dạng toàn phương không xác định vì $A(1, 0) = 1 > 0$ và $A(0, 1) = -1 < 0$.

Từ ví dụ trên, ta thấy việc xác định dấu cho các dạng toàn phương có thể thực hiện được bằng định nghĩa. Công việc này khá dễ dàng đối với dạng toàn phương trên không gian vector có số chiều thấp. Tuy nhiên, đối với các dạng toàn phương trên không gian vector có số chiều lớn, việc xác định dấu bằng định nghĩa trở nên khó khăn hơn. Để vượt qua khó khăn này, người ta biểu diễn dạng toàn phương (4.2) theo một dạng mới

$$A(u) = [u_1\ u_2\ \dots\ u_n]A[u_1\ u_2\ \dots u_n]^T, \quad \text{với } A = (a_{ij}).$$

Ma trận A (ký hiệu trùng với dạng toàn phương A) được gọi là ma trận liên kết với dạng toàn phương. Khi đó, việc khảo sát dấu của dạng toàn phương sẽ được thực hiện thông bằng cách tính các định thức con của ma trận liên kết với dạng toàn phương. Đây là một kết quả đặc biệt ấn tượng trong đại số tuyến tính, được gọi là định lý Sylvester. Định lý này được vận dụng khá hiệu quả cho bài toán khảo sát cực trị của hàm nhiều biến, bởi vì dạng toàn phương được xét dấu luôn có ma trận liên kết là ma trận Hess của hàm số tại điểm dừng.

Định lý 4.1.8 (Định lý Sylvester)**.** *Cho $A(u)$ là dạng toàn phương liên kết với ma trận $A = (a_{ij})$ vuông cấp n. Ta xét n định thức con trên đường chéo chính của ma trận A, được xác định bởi:*

$$\Delta_1 = a_{11},\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},\ ...,\ \Delta_n = \det A.$$

Khi đó, có thể xảy ra một trong các trường hợp sau:

i) Nếu $\Delta_i > 0$ với mọi $i = 1, 2, ..., n$ thì $A(u)$ xác định dương.

ii) Nếu $(-1)^i \Delta_i > 0$ với mọi $i = 1, 2, ..., n$ thì $A(u)$ xác định âm.

iii) Nếu $\Delta_i \geq 0$ với mọi $i = 1, 2, ..., n$ và tồn tại i_0 sao cho $\Delta_{i_0} = 0$ thì $A(u)$ nửa xác định dương.

iv) Nếu $(-1)^i \Delta_i \geq 0$ với mọi $i = 1, 2, ..., n$ và tồn tại i_0 sao cho $\Delta_{i_0} = 0$ thì $A(u)$ nửa xác định âm.

v) Trong mọi trường hợp khác thì $A(u)$ không xác định.

Chứng minh. Sinh viên tham khảo chứng minh của định lý này trong các học phần đại số tuyến tính. □

4.1.4 Định lý điều kiện đủ

Kết quả về điều kiện đủ để hàm nhiều biến đạt cực trị tại điểm dừng được phát biểu trong định lý dưới đây.

Định lý 4.1.9 (Điều kiện đủ cho hàm nhiều biến)**.** *Cho U mở trong $\mathbb{R}^n$, $f : U \to \mathbb{R}$, $f \in C^2(U)$ và $x_0 \in U$ là điểm dừng của f. Giả sử $A(u)$ là dạng toàn phương liên kết với ma trận Hess A của hàm f tại x_0. Khi đó, có thể xảy ra các trường hợp sau đây:*

i) Nếu $A(u)$ xác định dương thì f đạt cực tiểu tại x_0.

ii) Nếu $A(u)$ xác định âm thì f đạt cực đại tại x_0.

iii) Nếu $A(u)$ không xác định thì f không đạt cực trị tại x_0.

iv) Nếu $A(u)$ nửa xác định dương hoặc nửa xác định âm thì chưa thể kết luận về cực trị của f tại x_0.

Chứng minh. Ta sẽ chứng minh *i*), các kết quả còn lại có thể được chứng minh tương tự. Dùng công thức Taylor của f tại x_0, với mọi $h \in \mathbb{R}^n$ đủ nhỏ, tồn tại $\theta \in (0,1)$ sao cho:

$$\begin{aligned} f(x_0+h) - f(x_0) &= \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x_0+\theta h)h_i h_j \\ &= \frac{1}{2}A(h) + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x_0+\theta h) - \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x_0)\right] h_i h_j. \end{aligned} \tag{4.3}$$

Ở đây chú ý rằng x_0 là điểm dừng của f nên $\nabla f(x_0) = 0_{\mathbb{R}^n}$. Xét mặt cầu đơn vị S xác định bởi

$$S = \{u \in \mathbb{R}^n : \ \|u\| = 1\}.$$

Lưu ý rằng dạng toàn phương là một ánh xạ liên tục, nên ta có A liên tục trên tập S. Mặt khác, do S là tập đóng và bị chặn nên theo Định lý 2.4.4, A đạt giá trị nhỏ nhất trên S. Ta có thể đặt

$$m = \min\{A(u),\ u \in S\}.$$

Ngoài ra, theo giả thiết của định lý, dạng toàn phương A xác định dương nên $A(u) > 0$, với mọi $u \in S$. Từ đó suy ra $m > 0$.

Với mọi $u \in S$ và số thực t đủ nhỏ, thay $h = tu$ trong (4.3), ta thu được:

$$f(x_0+tu) - f(x_0) = \frac{t^2}{2}\left[A(u) + \varphi(tu)\right],$$

trong đó hàm φ được xác định bởi

$$\varphi(tu) = \sum_{i,j=1}^{n}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x_0+t\theta u) - \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x_0)\right] u_i u_j.$$

Chú ý rằng f có các đạo hàm riêng bậc 2 liên tục nên $\lim\limits_{t\to 0}\varphi(tu) = 0$. Do đó, tồn tại $\delta > 0$ sao cho với $|t| < \delta$ thì

$$|\varphi(tu)| < \frac{m}{2}, \quad \forall u \in S.$$

Từ đó suy ra:

$$f(x_0+tu)-f(x_0) > \frac{t^2m}{4} \geq 0, \quad \forall u \in S.$$

Vậy, ta kết luận được hàm f đạt cực tiểu tại x_0. □

Ví dụ 4.1.10. Khảo sát cực trị của các hàm số sau:

$$f(x,y) = x^4+y^4-x^2-2xy-y^2, \quad (x,y)\in\mathbb{R}^2.$$

Lời giải: Tọa độ điểm dừng là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^3-2x-2y = 0 \\ 4y^3-2y-2x = 0 \end{cases}.$$

Giải hệ phương trình này, ta thấy hàm số có tất cả 3 điểm dừng: $(0,0)$, $(1,1)$ và $(-1,-1)$.

Ma trận Hess ứng với hàm f có dạng:

$$A = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12x^2-2 & -2 \\ -2 & 12y^2-2 \end{bmatrix}.$$

Từ đó suy ra các đại lượng

$$\Delta_1 = 12x^2-2,\ \Delta_2 = (12x^2-2)(12y^2-2)-4.$$

Tại hai điểm dừng $(1,1)$ và $(-1,-1)$, ta có $\Delta_1 = 10 > 0$ và $\Delta_2 = 96 > 0$ nên A là dạng toàn phương xác định dương. Do đó hàm f đại cực tiểu tại $(1,1)$ và $(-1,-1)$.

Tại điểm dừng $(0,0)$, ta thấy $\Delta_1 = -2 < 0$ và $\Delta_2 = 0$ nên A là dạng toàn phương nửa xác định âm. Với mọi $n > 1$, ta thấy:

$$f\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right) = \frac{2}{n^2}\left(\frac{1}{n^2}-2\right) < 0 \ \text{ và } \ f\left(\frac{1}{n},-\frac{1}{n}\right) = \frac{2}{n^4} > 0.$$

Điều này chứng tỏ trong bất kỳ lân cận nào của điểm $(0,0)$, ta luôn tìm được hai điểm để f đổi dấu, tức là tồn tại (x_1,y_1) và (x_2,y_2) sao cho

$$f(x_1,y_1) < 0 = f(0,0) < f(x_2,y_2).$$

Do đó, theo định nghĩa, hàm f không đạt cực trị tại $(0,0)$. □

4.2 Cực trị địa phương có điều kiện

4.2.1 Định nghĩa và định lý điều kiện cần

Trong nhiều trường hợp, người ta cần tìm cực trị của hàm nhiều biến với một số ràng buộc của các biến. Chẳng hạn bài toán tìm cực trị của hàm số $f(x, y) = 2x + y$ trên đường tròn $x^2 + y^2 = 5$. Đây được gọi là bài toán xác định cực trị địa phương có điều kiện của hàm nhiều biến. Ràng buộc $x^2 + y^2 = 5$ được viết lại dưới dạng $\varphi(x, y) = 0$, trong đó hàm φ được xác định bởi $\varphi(x, y) = x^2 + y^2 - 5$. Một cách tổng quát, ta có thể nêu định nghĩa về cực trị địa phương có điều kiện cho hàm nhiều biến như bên dưới.

Định nghĩa 4.2.1. *Cho U mở trong $\mathbb{R}^n$, $f : U \to \mathbb{R}$, $\varphi : U \to \mathbb{R}$. Đặt*

$$V = \{x \in U : \varphi(x) = 0\}.$$

Ta nói f đạt cực đại địa phương tại $x_0 \in V$ với ràng buộc $\varphi(x) = 0$ nếu tồn tại $r > 0$ sao cho

$$f(x) \leq f(x_0), \quad \forall x \in B(x_0, r) \cap V.$$

Ta nói f đạt cực tiểu địa phương tại $x_0 \in V$ với ràng buộc $\varphi(x) = 0$ nếu tồn tại $r > 0$ sao cho

$$f(x) \geq f(x_0), \quad \forall x \in B(x_0, r) \cap V.$$

Cực đại địa phương và cực tiểu địa phương được gọi chung là cực trị địa phương và được gọi tắt là cực trị.

Đối với bài toán cực trị có điều kiện, ta cần khảo sát sự thay đổi giá trị của hàm f dọc theo $\varphi(x) = 0$. Điều này làm cho hàm f không còn đạt cực trị có điều kiện tại điểm dừng của nó. Thay vào đó, người ta chứng minh được rằng hàm f đạt cực trị tại điểm mà tốc độ thay đổi của hàm f cùng phương với tốc độ thay đổi của hàm φ. Kết quả này được thể hiện qua định lý nhân tử Lagrange, là một trong những định lý rất ấn tượng trong lý thuyết về phép tính vi phân.

Trong định lý nhân tử Lagrange, người ta chứng minh được rằng nếu f đạt cực trị tại x_0 với ràng buộc $\varphi(x) = 0$ và $\nabla\varphi(x_0) \neq 0_{\mathbb{R}^n}$ thì vector

$\nabla f(x_0)$ cùng phương với vector $\nabla\varphi(x_0)$, nghĩa là tồn tại số thực λ sao cho

$$\nabla f(x_0) = \lambda\nabla\varphi(x_0).$$

Khi đó, bằng cách xét hàm Lagrange L xác định bởi

$$L(x,\lambda) := f(x) - \lambda\varphi(x), \tag{4.4}$$

biểu thức trên có thể viết lại thành $\nabla_x L(x_0,\lambda) = 0$. Ngoài ra, ràng buộc $\varphi(x) = 0$ có thể được biểu diễn tương đương dưới dạng $\partial_\lambda L(x_0,\lambda) = 0$. Như vậy, điểm (x_0,λ) thỏa mãn hệ phương trình

$$\nabla L(x_0,\lambda) = 0,$$

nên đây là điểm dừng của hàm Lagrange L. Nói cách khác, nếu hàm f đạt cực trị tại x_0 với ràng buộc $\varphi(x) = 0$ thì tồn tại λ sao cho (x_0,λ) là điểm dừng của hàm Lagrange L. Từ đó, để khảo sát cực trị có điều kiện của hàm f, ta sẽ tìm tất cả các điểm dừng của hàm Lagrange.

Định lý 4.2.2 (Điều kiện cần - Định lý nhân tử Lagrange)**.** *Giả sử các đạo hàm riêng của f tồn tại, f đạt cực trị tại x_0 với ràng buộc $\varphi(x) = 0$ và $\nabla\varphi(x_0) \neq 0_{\mathbb{R}^n}$. Khi đó, tồn tại số thực λ sao cho*

$$\nabla f(x_0) = \lambda\nabla\varphi(x_0).$$

Chứng minh. Ta mô tả ý tưởng chứng minh của định lý nhân tử Lagrange. Giả sử f đạt cực trị tại x_0 và $\nabla\varphi(x_0) \neq 0_{\mathbb{R}^n}$. Khi đó, với mọi đường cong khả vi $x = \gamma(t)$ nằm trọn trên mặt cong $\varphi(x) = 0$ thỏa $\gamma(0) = x_0$, hàm số $g(t) = f(\gamma(t))$ đạt cực trị tại $t = 0$. Suy ra

$$0 = g'(0) = \langle \nabla f(\gamma(0)), \gamma'(0)\rangle = \langle \nabla f(x_0), \gamma'(0)\rangle.$$

Do đó, $\nabla f(x_0)$ luôn vuông góc với tiếp tuyến của đường cong $x = \gamma(t)$ tại $\gamma(0) = x_0$. Suy ra $\nabla f(x_0)$ vuông góc với mặt phẳng tiếp xúc của mặt cong $\varphi(x) = 0$ tại x_0. Vậy $\nabla f(x_0)$ phải cùng phương với vector $\nabla\varphi(x_0)$. □

Bài toán cực trị địa phương với nhiều ràng buộc cũng được định nghĩa và khảo sát một cách tương tự. Khi đó, hàm Lagrange được điều chỉnh một cách tương ứng. Chẳng hạn, ta xét bài toán cực trị địa phương của hàm f với hai ràng buộc $\varphi_1(x) = \varphi_2(x) = 0$, hàm Lagrange tương ứng sẽ có dạng $L(x,\lambda_1,\lambda_2) = f(x) - \lambda_1\varphi_1(x) - \lambda_2\varphi_2(x)$.

4.2.2 Định lý điều kiện đủ

Định lý sau đây đưa ra một điều kiện đủ để hàm f đạt cực trị có điều kiện. Ta thừa nhận định lý này.

Định lý 4.2.3 (Điều kiện đủ)**.** *Cho U mở trong $\mathbb{R}^n$ và hai hàm $f: U \to \mathbb{R}$, $\varphi: U \to \mathbb{R}$ thỏa mãn $f, \varphi \in C^2(U)$. Giả sử (x_0, λ_0) là điểm dừng của hàm Lagrange L xác định bởi (4.4) và $\nabla\varphi(x_0) \neq 0$. Xét dạng toàn phương*

$$A(u) = \sum_{i,j=1}^{n} \left[\frac{\partial^2 L(x, \lambda_0)}{\partial x_j \partial x_i}(x_0)\right] u_i u_j,$$

với $u = (u_1, u_2, ..., u_n) \in \mathbb{R}^n$ thỏa điều kiện $\langle \nabla\varphi(x_0), u\rangle = 0$. Khi đó,

i) Nếu $A(u)$ là dạng toàn phương xác định dương thì f đạt cực tiểu tại x_0 với ràng buộc $\varphi(x) = 0$.

ii) Nếu $A(u)$ là dạng toàn phương xác định âm thì f đạt cực đại tại x_0 với ràng buộc $\varphi(x) = 0$.

iii) Nếu $A(u)$ là dạng toàn phương không xác định thì f không đạt cực trị tại x_0 với ràng buộc $\varphi(x) = 0$.

iv) Nếu $A(u)$ là dạng toàn phương nửa xác định dương hoặc nửa xác định âm thì chưa có kết luận về cực trị của f tại x_0 với ràng buộc $\varphi(x) = 0$.

Trong định lý này, ta kết luận cực trị tại điểm dừng dựa trên dạng toàn phương liên kết với ma trận Hess theo biến x của hàm Lagrange L. Đồng thời, dạng toàn phương này được xét trên không gian trực giao với không gian sinh bởi vector $\nabla\varphi(x_0)$. Chú ý rằng trong trường hợp này, ta không thể áp dụng định lý Sylvester để xác định dấu của dạng toàn phương. Thay vào đó, việc xác định dấu của dạng toàn phương được thực hiện bằng định nghĩa.

Ví dụ 4.2.4. Tìm cực trị của hàm số $f(x, y) = 2x + y$ trên đường tròn $x^2 + y^2 = 5$.

Lời giải: Đặt $\varphi(x, y) = x^2 + y^2 - 5$ và xét hàm Lagrange

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda\varphi(x, y) = 2x + y - \lambda(x^2 + y^2 - 5).$$

Tọa độ điểm dừng của L là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x}(x,y,\lambda) = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial y}(x,y,\lambda) = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda}(x,y,\lambda) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 - 2\lambda x = 0 \\ 1 - 2\lambda y = 0 \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases}.$$

Giải hệ phương trình, ta suy ra hàm Lagrange L có tất cả hai điểm dừng lần lượt là $\left(2, 1, \frac{1}{2}\right)$ và $\left(-2, -1, -\frac{1}{2}\right)$. Xét dạng toàn phương

$$A(u_1, u_2) = \frac{\partial^2 L}{\partial x^2}u_1^2 + 2\frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y}u_1u_2 + \frac{\partial^2 L}{\partial y^2}u_2^2 = -2\lambda(u_1^2 + u_2^2),$$

với điều kiện $\langle \nabla\varphi(x,y), (u_1,u_2)\rangle = 0 \Leftrightarrow 2xu_1 + 2yu_2 = 0$.

Tại điểm dừng $\left(2, 1, \frac{1}{2}\right)$, ta có

$$A(u_1, u_2) = -(u_1^2 + u_2^2), \text{ với điều kiện } 4u_1 + 2u_2 = 0.$$

Thay $u_2 = -2u_1$ vào A, ta được $A(u_1, u_2) = -5u_1^2$. Từ đó kết luận A là dạng toàn phương xác định âm nên f đạt cực đại tại $(2, 1)$ với điều kiện $x^2 + y^2 = 5$.

Hoàn toàn tương tự, tại điểm dừng $\left(-2, -1, -\frac{1}{2}\right)$, dạng toàn phương tương ứng xác định dương. Dẫn đến hàm f cực tiểu tại $(-2, -1)$ với điều kiện $x^2 + y^2 = 5$. □

4.2.3 Bài toán cực trị toàn cục

Bài toán cực trị toàn cục cho hàm nhiều biến còn được gọi là bài toán giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất. Trong Chương 2, ta biết rằng hàm số liên tục trên tập đóng và bị chặn sẽ đạt được giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất trên đó. Tuy nhiên, việc xác định giá trị lớn nhất và nhỏ nhất cho hàm liên tục là không dễ dàng. Trong trường hợp hàm số khả vi liên tục đến cấp hai, đồng thời biên của tập đóng, bị chặn tương ứng là một đường

cong trơn, người ta có thể được giải quyết thông qua hai bài toán cực trị không điều kiện và cực trị có điều kiện. Tiếp theo, ta sẽ mô tả phương pháp giải quyết bài toán này.

Cho U mở, bị chặn trong $\mathbb{R}^n$ và hàm $f : \overline{U} \to \mathbb{R}$ sao cho $f, \varphi \in C^2(\overline{U})$. Giả sử biên của tập U (ký hiệu là ∂U và được định nghĩa bởi $\partial U = \overline{U} \setminus U$) xác định bởi mặt cong $\varphi(x) = 0$, tức là

$$\partial U = \{x \in \mathbb{R}^n : \ \varphi(x) = 0\}.$$

Ta biết rằng f đạt giá trị lớn nhất trên $\overline{U}$ nên có thể giả sử

$$f(x_0) = \max\{f(x),\ x \in \overline{U}\}.$$

Khi đó, chỉ có thể xảy ra một trong hai trường hợp sau đây:

- Nếu $x_0 \in U$ thì f đạt cực trị không điều kiện tại x_0.
- Nếu $x_0 \in \partial U$ thì f đạt cực trị với ràng buộc $\varphi(x) = 0$ tại x_0.

Như vậy, hàm f chỉ có thể đạt giá trị lớn nhất tại các điểm cực trị không điều kiện hoặc cực trị với ràng buộc $\varphi(x) = 0$ trên $\overline{U}$. Do đó, để tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm f trên $\overline{U}$, ta chỉ cần so sánh giá trị của hàm f tại các điểm dừng của f và điểm dừng của hàm Lagrange L trên U.

Ví dụ 4.2.5. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - xy + x + y$$

trong hình tròn U xác định bởi

$$U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + y^2 \leq 5\}.$$

Lời giải: Trước hết, ta xác định điểm dừng của hàm f và hàm Lagrange trong U. Tọa độ điểm dừng của hàm f là nghiệm của hệ phương trình sau

$$\begin{cases} 2x - y + 1 = 0, \\ 2y - x + 1 = 0. \end{cases}$$

Giải hệ phương trình này, ta xác định hàm f có duy nhất một điểm dừng $(-1, -1) \in U$.

Xét hàm Lagrange L xác định bởi

$$L(x, y, \lambda) = x^2 + y^2 - xy + x + y - \lambda(x^2 + y^2 - 5).$$

Tọa độ điểm dừng của hàm Lagrange L là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} 2x - y + 1 - 2\lambda x = 0, \\ 2y - x + 1 - 2\lambda y = 0, \\ x^2 + y^2 = 5. \end{cases}$$

Bằng cách biến đổi tương đương hệ này dưới dạng

$$\begin{cases} (3 - 2\lambda)(x - y) = 0, \\ 2y - x + 1 - 2\lambda y = 0, \\ x^2 + y^2 = 5, \end{cases}$$

ta thu được tọa độ điểm dừng của L lần lượt là

$$\left(2, -1, \frac{3}{2}\right), \quad \left(-1, 2, \frac{3}{2}\right),$$
$$\left(\frac{\sqrt{10}}{2}, \frac{\sqrt{10}}{2}, \frac{1 + 2/\sqrt{10}}{2}\right), \quad \left(-\frac{\sqrt{10}}{2}, -\frac{\sqrt{10}}{2}, \frac{1 - 2/\sqrt{10}}{2}\right).$$

Để xác định cực trị toàn cục của f trên U, ta so sánh giá trị của hàm f tại các điểm dừng vừa tìm được. Ta có:

$$\begin{aligned} &f(-1, -1) = 1, \\ &f(2, -1) = f(-1, 2) = 8, \\ &f\left(\frac{\sqrt{10}}{2}, \frac{\sqrt{10}}{2}\right) = \frac{5}{2} + \sqrt{10}, \\ &f\left(-\frac{\sqrt{10}}{2}, -\frac{\sqrt{10}}{2}\right) = \frac{5}{2} - \sqrt{10}. \end{aligned}$$

Từ các giá trị trên, ta kết luận được

$$\begin{aligned} &\max_{x \in U} f(x) = f(2, -1) = f(-1, 2) = 8, \\ &\min_{x \in U} f(x) = f\left(-\frac{\sqrt{10}}{2}, -\frac{\sqrt{10}}{2}\right) = \frac{5}{2} - \sqrt{10}. \end{aligned}$$

Bài toán được giải xong. □

Chú ý 4.2.6. Trong một số trường hợp, thay vì tìm điểm dừng của hàm Lagrange, người ta có thể tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm f trên biên của tập U, sau đó so sánh với giá trị của hàm f tại điểm dừng bên trong U.

BÀI TẬP CHƯƠNG 4

Mục tiêu cơ bản của Chương 4:

- Phát biểu và chứng minh được các định lý về điều kiện cần và điều kiện đủ cho cực trị không điều kiện của hàm nhiều biến.
- Khảo sát được bài toán cực trị không điều kiện và cực trị có điều kiện cho hàm hai biến và ba biến.
- Vận dụng được phương pháp tìm cực trị không điều kiện và có điều kiện để giải bài toán cực trị toàn cục.

1. Tìm cực trị của các hàm hai biến xác định bởi các công thức sau đây:
   (a) $f(x,y) = 2x^4 + y^4 - x^2 - 2y^2$.
   (b) $f(x,y) = x^4 + y^4 - x^2 - 4xy - 2y^2$.
   (c) $f(x,y) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{2}{y} - xy$.
   (d) $f(x,y) = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$.
   (e) $f(x,y) = (2x - y)(1 - xy)$.
   (f) $f(x,y) = x \sin y$.
   (g) $f(x,y) = 2x + y - \dfrac{1}{xy}$.
   (h) $f(x,y) = x + y - xe^y$.
   (i) $f(x,y) = e^x(x + y^2 + 2y)$.
2. Cho hàm hai biến $f(x,y) = x^2y^3(4 - x - y)$. Xét các tập hợp
$$U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ y(4 - x - y) > 0\},$$
$$V = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ y(4 - x - y) < 0\}.$$
   (a) Chứng minh rằng U và V là các tập mở.
   (b) Tìm tập hợp tất cả các điểm dừng của hàm f.
   (c) Chứng minh f đạt cực trị tại các điểm dừng thuộc U hoặc V.
   (d) Chứng minh rằng f không thể đạt cực trị tại các điểm dừng không thuộc cả U và V.

3. Tìm cực trị của các hàm ba biến xác định bởi các công thức sau:
   (a) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 6y - 2z$.
   (b) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - xy + x - 2z$.
   (c) $f(x, y, z) = x + \dfrac{y^2}{4x} + \dfrac{z^2}{y} + \dfrac{2}{z}$.
   (d) $f(x, y, z) = x^3 + xy + y^2 - 2xz + 2z^2 + 3y - 1$.
   (e) $f(x, y, z) = \sin x + \sin y + \sin z - \sin(x + y + z)$ trong miền
   $$U = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ 0 < x, y, z < \pi\right\}.$$
4. Chia 1 thành 3 phần sau cho tích của chúng lớn nhất.
5. Tìm diện tích lớn nhất của hình chữ nhật nội tiếp trong elip
$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1.$$
6. Tìm cực trị có điều kiện sau:
   (a) $f(x, y) = x^2 + y^2$ với điều kiện $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 2$.
   (b) $f(x, y) = xy$ với điều kiện $\dfrac{x^2}{4} + y^2 = 1$.
   (c) $f(x, y, z) = x + y + z$ với điều kiện $xyz = 1$.
   (d) $f(x, y, z) = x + y + z$ với điều kiện $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = 1$.
   (e) $f(x, y, z) = x - 2y + 5z$ với điều kiện $x^2 + y^2 + z^2 = 30$.
   (f) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ với điều kiện $x^2 + 2y^2 - z^2 - 1 = 0$.
7. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm f trong tập tương ứng:
   (a) $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$ trong
   $$U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ 0 \leq x \leq 2, \ -1 \leq y \leq 2\}.$$
   (b) $f(x, y) = x^2 + y^2 - xy - x - y$ trong
   $$U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ 0 \leq x, \ 0 \leq y, \ x + y \leq 3\}.$$
   (c) $f(x, y) = xy^2$ trong
   $$U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + y^2 \leq 1\}.$$
   (d) $f(x, y) = 2x^2 + y^2 - xy + x + y$ trong
   $$U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + y^2 \leq 2\}.$$

Chương 5

Tích phân bội

5.1 Định nghĩa tích phân bội

5.1.1 Tích phân Riemann trên hộp đóng

a) Hộp trong $\mathbb{R}^n$

Cho $a_1, a_2, ..., a_n$ và $b_1, b_2, ..., b_n$ là các số thực thỏa $a_i \leq b_i,\ \forall i = \overline{1, n}$.

- Tập hợp
$$B = \{(x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n :\ a_i \leq x_i \leq b_i,\ \forall i = \overline{1, n}\}$$
được gọi là hộp đóng trong $\mathbb{R}^n$. Ngoài ra, ta còn ký hiệu dạng
$$B = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times ... \times [a_n, b_n].$$

- Thể tích của hộp B là số thực xác định bởi
$$V(B) = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2)...(b_n - a_n).$$
Nếu có chỉ số i sao cho $a_i = b_i$ thì ta nói hộp B suy biến, khi đó $V(B) = 0$.

- Khái niệm hộp mở và thể tích hộp mở được định nghĩa hoàn toàn tương tự, bằng cách thay dấu $\leq$ bởi dấu $<$.

Ví dụ 5.1.1. Trong $\mathbb{R}$, hộp B là đoạn $[a, b]$. Trong $\mathbb{R}^2$, hộp đóng là hình chữ nhật, thể tích hộp là diện tích hình chữ nhật.

b) Phân hoạch

- Phân hoạch P của hộp đóng $B = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times ... \times [a_n, b_n]$ là một bộ gồm n phân hoạch $P_1, P_2, ..., P_n$ của các đoạn $[a_1, b_1]$, $[a_2, b_2]$, ..., $[a_n, b_n]$ trong $\mathbb{R}$ tương ứng. Nghĩa là, với mỗi $i = 1, 2, ..., n$,
$$P_i = \{x_0^i, x_1^i, ..., x_{k_i}^i\},\ \text{với } x_0^i = a_i < x_1^i < ... < x_{k_i}^i = b_i.$$
Khi đó $P = P_1 \times P_2 \times ... \times P_n$.

- Đường kính của phân hoạch P là số thực xác định bởi

$$d(P) = \max\left\{\left|x_j^i - x_{j-1}^i\right| : \ i = 1, 2, ..., n, \ j = 1, 2, ..., k_i\right\}.$$

- Phân hoạch P chia hộp đóng B thành K hộp con $B_1, B_2, ..., B_K$. Chú ý rằng

$$\sum_{k=1}^{K} V(B_k) = V(B).$$

- Trong mỗi hộp con B_k, ta chọn ra một điểm c_k tùy ý,

$$c_k = (c_1^k, c_2^k, ..., c_n^k) \in B_k, \quad \forall k = \overline{1, K}.$$

  Khi đó, ta có phép chọn C ứng với phân hoạch P.

c) Tổng Riemann

- Cho hàm $f : \ D \to \mathbb{R}$ bị chặn và $B \subset D$. Khi đó, tổng Riemann của hàm f ứng với phân hoạch P và phép chọn C được xác định bởi:

$$S(f, P, C) = \sum_{k=1}^{K} f(c_k) V(B_k).$$

d) Khả tích Riemann

- Hàm f được gọi là khả tích Riemann (gọi tắt là khả tích) trên hộp B nếu tồn tại số thực I sao cho với mỗi $\varepsilon > 0$ cho trước, tồn tại $\delta > 0$ sao cho với mọi phân hoạch P của hộp B thỏa $d(P) < \delta$ và mọi phép chọn C, ta đều có

$$|S(f, P, C) - I| < \varepsilon.$$

  Viết một cách đơn giản:

$$\lim_{d(P)\to 0} S(f, P, C) = I, \quad \text{với mọi phép chọn } C.$$

  Khi đó, I được gọi là tích phân Riemann của f trên B, ký hiệu là

$$I = \int_B f(x)dx = \int_B f(x_1, x_2, ..., x_n) d(x_1, x_2, ..., x_n).$$

Ví dụ 5.1.2.

i) Nếu $f(x) = \alpha, \ \forall x \in B$ với α là hằng số thì $\displaystyle\int_B f(x)dx = \alpha V(B)$.

ii) Xét hàm số f xác định bởi

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{nếu } x \in \mathbb{Q}^n, \\ 0, & \text{nếu} x \in \mathbb{R}^n \setminus \mathbb{Q}^n. \end{cases}$$

Khi đó hàm f không khả tích trên hộp B có thể tích dương bất kỳ.

Chứng minh. Xét hộp B có thể tích dương với phân hoạch P bất kỳ. Biết rằng giữa hai số thực bất kỳ luôn tồn tại số hữu tỉ và vô tỉ, do đó trên mỗi hộp con B_k, ta có thể chọn được

$$c_k \in B_k \cap \mathbb{Q}^n, \quad e_k \in B_k \cap (\mathbb{R}^n \setminus \mathbb{Q}^n).$$

Ta được 2 phép chọn C và E tương ứng. Khi đó, với chú ý rằng $f(c_k) = 1$ và $f(e_k) = 0$, ta suy ra được

$$S(f, P, C) = \sum_{k=1}^{K} f(c_k)V(B_k) = \sum_{k=1}^{K} V(B_k) = V(B) > 0,$$

$$S(f, P, E) = \sum_{k=1}^{K} f(e_k)V(B_k) = 0.$$

Nghĩa là ta có hai phép chọn sao cho tổng Riemann lần lượt nhận hai giá trị khác nhau. Do đó giới hạn $\lim\limits_{d(P)\to 0} S(f, P, C)$ không tồn tại. Vậy hàm f không khả tích trên bất kỳ hộp nào có thể tích dương của $\mathbb{R}^n$. □

Sử dụng định nghĩa tích phân bội trên hộp đóng, ta có thể dễ dàng chứng minh các tính chất sau đây. Phương pháp chứng minh hoàn toàn tương tự như trong giải tích các hàm một biến.

Định lý 5.1.3. *Cho hai hàm f, g khả tích trên hộp đóng B. Khi đó, các mệnh đề sau đúng:*

i) Với mọi $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, ta có:

$$\int_B (\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \alpha \int_B f(x)dx + \beta \int_B g(x)dx.$$

ii) Nếu $f(x) \leq g(x),\ \forall x \in B$ thì $\displaystyle\int_B f(x)dx \leq \int_B g(x)dx$.

iii) Nếu $m \le f(x) \le M,\ \forall x \in B$ thì

$$mV(B) \le \int_B f(x)dx \le MV(B).$$

Nếu $V(B) > 0$, ta gọi đại lượng $\overline{f}_B = \dfrac{1}{V(B)} \displaystyle\int_B f(x)dx$ là trung bình tích phân của hàm f trên hộp B.

Định lý 5.1.4. *Các mệnh đề sau đây đúng:*

i) Hàm khả tích trên hộp đóng B thì bị chặn trên B.

ii) Hàm liên tục trên hộp đóng B thì khả tích trên B.

5.1.2 Tích phân trên miền bị chặn

Cho miền $D \subset \mathbb{R}^n$ bị chặn và hàm f xác định trên D. Do D bị chặn nên tồn tại hộp đóng $B \supset D$. Xét hàm

$$F(x) = \begin{cases} f(x), & x \in D, \\ 0, & x \in B \setminus D. \end{cases}$$

Định nghĩa 5.1.5. *Khi đó, ta nói f khả tích trên D nếu F khả tích trên B và định nghĩa*

$$\int_D f(x)dx = \int_B F(x)dx.$$

Sinh viên có thể dễ dàng kiểm tra tính hợp lý của Định nghĩa 5.1.5, tức là giá trị của tích phân $\displaystyle\int_B F(x)dx$ không phụ thuộc vào cách chọn hộp đóng B chứa D.

Định lý 5.1.6. *Các Định lý 5.1.3 và 5.1.4 vẫn đúng nếu ta thay hộp đóng B bởi tập bị chặn D.*

Định nghĩa 5.1.7. *Cho miền D bị chặn trong $\mathbb{R}^n$. Thể tích miền D được định nghĩa như sau:*

i) Đại lượng $V(D) = \displaystyle\int_D 1dx$ gọi là thể tích của miền D.

ii) D được gọi là có thể tích 0 nếu $V(D) = 0$.

Sử dụng các định nghĩa trên, ta có thể chứng minh được một số tính chất liên quan đến các tập có thể tích 0, trong các định lý dưới đây.

Định lý 5.1.8. *Cho $D \subset \mathbb{R}^n$ là tập có thể tích 0. Các mệnh đề sau đúng.*

i) $V(U) = 0, \quad \forall U \subset D.$

ii) Với mọi tập A bị chặn trong $\mathbb{R}^n$, ta có:

$$V(A \cup D) = V(A \setminus D) = V(A).$$

iii) Hàm f xác định và bị chặn trên D sẽ khả tích trên D và $\displaystyle\int_D f(x)dx = 0.$

Định lý 5.1.9. *Cho D_1, D_2 bị chặn trong $\mathbb{R}^n$ thỏa $V(D_1 \cap D_2) = 0$. Giả sử f khả tích trên D_1 và D_2. Khi đó, f khả tích trên $D_1 \cup D_2$ và*

$$\int_{D_1 \cup D_2} f(x)dx = \int_{D_1} f(x)dx + \int_{D_2} f(x)dx.$$

Chứng minh. Xét các hàm

$$f_1(x) = \begin{cases} f(x), & x \in D_1, \\ 0, & x \notin D_1, \end{cases}$$

$$f_2(x) = \begin{cases} f(x), & x \in D_2, \\ 0, & x \notin D_2, \end{cases}$$

$$f_3(x) = \begin{cases} f(x), & x \in D_1 \cap D_2, \\ 0, & x \notin D_1 \cap D_2, \end{cases}$$

$$g(x) = f_1(x) + f_2(x) - f_3(x) = \begin{cases} f(x), & x \in D_1 \cup D_2, \\ 0, & x \notin D_1 \cup D_2. \end{cases}$$

Khi đó, ta có:

$$\begin{aligned} \int_{D_1 \cup D_2} f(x)dx &= \int_{D_1 \cup D_2} g(x)dx \\ &= \int_{D_1 \cup D_2} f_1(x)dx + \int_{D_1 \cup D_2} f_2(x)dx - \int_{D_1 \cup D_2} f_3(x)dx \\ &= \int_{D_1} f(x)dx + \int_{D_2} f(x)dx - \int_{D_1 \cap D_2} f(x)dx. \end{aligned}$$

Do $V(D_1 \cap D_2) = 0$ nên theo Định lý 5.1.8, ta có $\displaystyle\int_{D_1 \cap D_2} f(x)dx = 0$. Từ đây suy ra điều phải chứng minh. □

Định lý 5.1.10. *Cho D bị chặn trong $\mathbb{R}^n$ và f bị chặn trên D. Nếu f liên tục trên D, ngoại trừ tập có thể tích 0, thì f khả tích trên D.*

Chứng minh. Theo giả thiết, tồn tại tập $U \subset D$ sao cho f liên tục trên U và $V(D \setminus U) = 0$. Do f bị chặn trên tập $D \setminus U$ có thể tích 0 nên khả tích trên $D \setminus U$. Ngoài ra, f liên tục trên U nên khả tích trên U. Theo Định lý 5.1.9, suy ra f khả tích trên D. □

5.2 Dùng tích phân lặp để tính tích phân bội

5.2.1 Định nghĩa tích phân lặp

Để thuận tiện trong việc mô tả tích phân lặp, ta chỉ xét trường hợp hàm hai biến, trường hợp hàm nhiều hơn hai biến được định nghĩa và khảo sát hoàn toàn tương tự.

Cho f là hàm hai biến xác định trên $B = [a, b] \times [c, d]$. Giả sử rằng với mỗi $y \in [c, d]$, hàm $f_y : [a, b] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f_y(x) = f(x, y)$ khả tích trên $[a, b]$.

Xét hàm $F : [c, d] \to \mathbb{R}$ xác định bởi $F(y) = \displaystyle\int_a^b f(x, y)dx$. Nếu F khả tích trên $[c, d]$ thì tích phân

$$I_1 = \int_c^d F(y)dy = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y)dx \right) dy.$$

được gọi là tích phân lặp của f trên hộp B. Để thuận tiện, người ta thường viết tích phân lặp trên dưới dạng

$$I_1 = \int_c^d dy \int_a^b f(x, y)dx.$$

Với cách định nghĩa tương tự, một tích phân lặp khác của f trên B là

$$I_2 = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y)dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y)dy \right) dx.$$

Mối liên hệ giữa tích phân lặp và tích phân bội được thể hiện trong định lý Fubini dưới đây.

Định lý 5.2.1 (Fubini). *Giả sử f khả tích trên hộp $B = [a, b] \times [c, d]$ và tích phân $F(y) = \int_a^b f(x, y)dx$ tồn tại với mọi $y \in [c, d]$. Khi đó, hàm F khả tích trên $[c, d]$ và*

$$\int_c^d F(y)dy = \int_B f(x, y)d(x, y).$$

Nói cách khác, khi đó ta có:

$$\int_B f(x, y)d(x, y) = \int_c^d dy \int_a^b f(x, y)dx.$$

Hệ quả 5.2.2. *Nếu f liên tục trên hộp $B = [a, b] \times [c, d]$ thì*

$$\int_B f(x, y)d(x, y) = \int_c^d dy \int_a^b f(x, y)dx = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y)dy.$$

Hệ quả 5.2.3. *Giả sử g và h là các hàm một biến, lần lượt liên tục trên $[a, b]$ và $[c, d]$. Khi đó*

$$\int_{[a,b]\times[c,d]} g(x)h(y)\, d(x, y) = \int_a^b g(x)\, dx. \int_c^d h(y)\, dy.$$

Ví dụ 5.2.4. Tính các tính phân bội sau:

a) $I = \int_B \sin x \cos y\, d(x, y)$, với $B = [1, \pi/2] \times [0, \pi/2]$.

b) $I = \int_B y \sin(xy)\, d(x, y)$, với $B = [1, 2] \times [0, \pi]$.

5.2.2 Phương pháp tính tích phân bội cơ bản

Định lý Fubini có những dạng tổng quát để tính được tích phân bội trên các miền phức tạp hơn miền có dạng hộp đóng. Dưới đây là một số miền có thể áp dụng được định lý Fubini tổng quát.

Giả sử hàm f khả tích trên miền bị chặn $D \subset \mathbb{R}^2$, trong đó D là một trong các miền sau:

a) Miền dạng 1:

$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ a \le x \le b, \ \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x)\right\},$$

trong đó φ_1, φ_2 là các hàm một biến liên tục trên $[a, b]$. Khi đó:

$$\int_D f(x, y)d(x, y) = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)dy.$$

b) Miền dạng 2:

$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ c \le y \le d, \ \psi_1(y) \le x \le \psi_2(y)\right\},$$

trong đó ψ_1, ψ_2 là các hàm một biến liên tục trên $[c, d]$. Khi đó:

$$\int_D f(x, y)d(x, y) = \int_c^d dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y)dx.$$

c) Ngoài ra, D còn có thể là hợp của các miền dạng 1 và dạng 2. Chẳng hạn, giả sử $D = D_1 \cup D_2$, trong đó $V(D_1 \cap D_2) = 0$ và D_1, D_2 lần lượt là các miền dạng 1 và dạng 2. Khi đó

$$\int_D f(x, y)d(x, y) = \int_{D_1} f(x, y)d(x, y) + \int_{D_2} f(x, y)d(x, y).$$

Ví dụ 5.2.5. Tính tích phân $I = \displaystyle\int_D f(x, y)d(x, y)$ với

a) $f(x, y) = x + 2y$ và D giới hạn bởi $y = 2x^2$, $y = 1 + x^2$.

b) $f(x, y) = xy$ và D giới hạn bởi $y = x - 1$, $y^2 = 2x + 6$.

Ví dụ 5.2.6. Tính tích phân lặp $I = \displaystyle\int_0^1 dy \int_0^y e^{-(x-1)^2} dx$.

Ví dụ 5.2.7. Sinh viên hãy viết công thức tính tích phân bội 3 trên các miền có dạng tương tự như trên.

5.3 Phép đổi biến trong tích phân bội

5.3.1 Phép đổi biến tổng quát

Cho hàm f liên tục trên miền bị chặn $D \subset \mathbb{R}^2$. Giả sử ánh xạ $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2): \ D_{uv} \to D$, $(u, v) \mapsto (x, y) = \varphi(u, v)$ là một song ánh. Ta nói φ là một phép đổi biến, và thường viết đơn giản như sau:

Xét phép đổi biến:

$$\begin{cases} x = \varphi_1(u, v), \\ y = \varphi_2(u, v), \end{cases} \qquad (u, v) \in D_{uv}.$$

Giả sử thêm rằng:

i) $\varphi_1, \varphi_2 \in C^1(D_{uv})$ (nghĩa là φ_1, φ_2 là các hàm liên tục và có đạo hàm riêng liên tục trên D_{uv}).

ii) Ma trận Jacobi không suy biến, tức là

$$\det J \neq 0, \quad \forall (u, v) \in D_{uv},$$

trong đó ma trận Jacobi xác định bởi

$$J = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial u} & \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial v} \\ \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial u} & \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial v} \end{pmatrix}.$$

Khi đó, ta có công thức đổi biến trong tích phân bội như sau:

$$\int_D f(x, y)\, d(x, y) = \int_{D_{uv}} f(\varphi_1(u, v), \varphi_2(u, v)).|\det J|\, d(u, v).$$

Chú ý rằng nếu ta xét phép đổi biến

$$\begin{cases} u = \psi_1(x, y), \\ v = \psi_2(x, y), \end{cases}$$

thì nghịch đảo của ma trận Jacobi cho bởi công thức

$$J^{-1} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \psi_1}{\partial x} & \dfrac{\partial \psi_1}{\partial y} \\ \dfrac{\partial \psi_2}{\partial x} & \dfrac{\partial \psi_2}{\partial y} \end{pmatrix},$$

và khi đó $\det J = \dfrac{1}{\det J^{-1}}$.

Ví dụ 5.3.1. Tính tích phân $\displaystyle\int_D (2x^2 - y^2)d(x,y)$, trong đó

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ 1 \le xy \le 4,\ x \le y \le 3x,\ x > 0\right\}.$$

Lời giải: Xét phép đổi biến

$$\begin{cases} u = xy, \\ v = \dfrac{y}{x}, \end{cases} \qquad (x,y) \in D.$$

Khi đó $(x,y) \in D \iff (u,v) \in D_{uv} = [1,4] \times [1,3]$.

Nghịch đảo của ma trận Jacobi xác định bởi

$$J^{-1} = \begin{pmatrix} y & x \\ -\dfrac{y}{x^2} & \dfrac{1}{x} \end{pmatrix},$$

nên $\det J^{-1} = \dfrac{2y}{x} = 2v \neq 0,\ \forall (u,v) \in D_{uv}$. Suy ra $\det J = \dfrac{1}{2v}$.

Để ý rằng từ công thức đổi biến, ta có $y^2 = uv$ và $x^2 = \dfrac{u}{v}$. Thay vào công thức đổi biến tích phân, ta được

$$\begin{aligned} \int_D (2x^2 - y^2)\, d(x,y) &= \int_{D_{uv}} \left(\frac{2u}{v} - uv\right) \frac{1}{2v}\, d(u,v) \\ &= \int_1^4 u du \int_1^3 \left(\frac{1}{v^2} - \frac{1}{2}\right) dv \\ &= -\frac{5}{2}. \end{aligned}$$

□

Ví dụ 5.3.2. Sinh viên hãy viết công thức đổi biến cho trường hợp tích phân bội ba.

5.3.2 Đổi biến trong tọa độ cực

Xét công thức đổi biến trong tọa độ cực:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi, \end{cases}$$

trong đó $(x, y) \in D \iff (r, \varphi) \in D_{r\varphi}$. Khi đó, ma trận Jacobi cho bởi công thức

$$J = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix}.$$

Dẫn đến $\det J = r$. Do đó, ta có công thức:

$$\int_D f(x, y)\, d(x, y) = \int_{D_{r\varphi}} r f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\, d(r, \varphi).$$

Ví dụ 5.3.3. Tính tích phân $I = \int_D f(x, y)\, d(x, y)$ với

a) $f(x, y) = x^2 - y^2$ và $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\ 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$.

b) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ và $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\ 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4,\ y \geq 0\}$.

5.3.3 Đổi biến trong tọa độ trụ

Xét công thức đổi biến trong tọa độ trụ:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi, \\ z = z. \end{cases}$$

Khi đó, $\det J = r$ nên ta có công thức:

$$\int_D f(x, y, z)\, d(x, y, z) = \int_{D_{r\varphi z}} r f(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z)\, d(r, \varphi, z).$$

5.3.4 Đổi biến trong tọa độ cầu

Xét công thức đổi biến trong tọa độ trụ:

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi, \\ y = r\sin\theta\sin\varphi, \\ z = r\cos\theta. \end{cases}$$

Khi đó, $\det J = r^2\sin\theta$. Chú ý rằng $\theta \in [0, \pi]$ nên ta luôn có

$$\det J = r^2\sin\theta \geq 0.$$

Do đó ta có công thức:

$$\int_D f(x,y,z)\,d(x,y,z)$$
$$= \int_{D_{r\varphi\theta}} r^2\sin\theta f(r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta)\,d(r,\varphi,\theta).$$

BÀI TẬP CHƯƠNG 5

Mục tiêu cơ bản của Chương 5:

- Giải thích được cách xây dựng định nghĩa tích phân.
- Phân tích được sự khả tích của một số hàm đơn giản bằng định nghĩa.
- Vận dụng được các phương pháp đổi biến, đặc biệt là đổi biến trong tọa độ cực, tọa độ trụ và tọa độ cầu để tính tích phân bội.

1. Đổi thứ tự lấy tích phân của các tích phân lặp sau đây:

   (a) $I = \int\limits_0^1 dx \int\limits_2^{4-2x} f(x,y)\,dy.$

   (b) $I = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x^2} f(x,y)\,dy.$

   (c) $I = \int\limits_0^1 dy \int\limits_{\sqrt{y}}^{1} f(x,y)\,dx.$

   (d) $I = \int\limits_0^1 dy \int\limits_{2-y}^{1+\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\,dx.$

   (e) $I = \int\limits_0^2 dx \int\limits_{\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{2x}} f(x,y)\,dy.$

2. Tính tích phân lặp sau đây: $I = \int\limits_0^1 dx \int\limits_{x^2}^{1} xe^{y^2}\,dy.$

3. Tính diện tích miền D giới hạn bởi các đường:

   (a) $x = 4y - y^2$; và $x + y = 6$.

   (b) $xy = 1$; $xy = 2$; $y = x$; và $y = 3x$.

4. Tính các tích phân kép sau:

(a) $I = \int\limits_D y \ln x \, d(x,y)$, D giới hạn bởi: $xy = 1$; $y = \sqrt{x}$; $x = 2$.

(b) $I = \int\limits_D x \, d(x,y)$, D giới hạn bởi: $x = \sqrt{2 - y^2}$; $y = x$; $y = 0$.

(c) $I = \int\limits_D x^2(y - x) \, d(x,y)$, D giới hạn bởi $y = x^2$ và $x = y^2$.

(d) $I = \int\limits_D |x + y| \, d(x,y)$, $D = \left\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : \ |x| \leq 1, \ |y| \leq 1\right\}$.

(e) $I = \int\limits_D \sqrt{|y - x^2|} \, d(x,y)$, $D = \left\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : |x| \leq 1, \ 0 \leq y \leq 1\right\}$.

5. Tính các tích phân kép sau:

(a) $I = \int\limits_D \dfrac{2}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}} \, d(x,y)$, D giới hạn bởi: $x^2 + y^2 \leq 1$.

(b) $I = \int\limits_D \sqrt{\dfrac{1 - x^2 - y^2}{1 + x^2 + y^2}} \, d(x,y)$, D giới hạn bởi $x^2 + y^2 \leq 1$, $x \geq 0$.

(c) $I = \int\limits_D \dfrac{\sin \sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}} \, d(x,y)$, D giới hạn bởi: $x^2 + y^2 = \dfrac{\pi^2}{4}$; $x^2 + y^2 = \pi^2$.

(d) $I = \int\limits_D \sqrt{x^2 + y^2} \, d(x,y)$, D là phần nằm trong góc phần tư thứ nhất của hình tròn $x^2 + y^2 \leq a^2$.

(e) $I = \int\limits_D \sqrt{2x - x^2 - y^2} \, d(x,y)$, D giới hạn bởi $x^2 - 2x + y^2 \leq 0$.

(f) $I = \int\limits_D \sqrt{x^2 + y^2} \, d(x,y)$, D giới hạn bởi $x^2 + y^2 - 2y \leq 0$.

(g) $I = \int\limits_D xy^2 \, d(x,y)$, D giới hạn bởi $x^2 + (y-1)^2 = 1$ và $x^2 + y^2 - 4y = 0$.

(h) $I = \int\limits_D \frac{1}{(x^2+y^2)^2}\, d(x,y)$, D giới hạn bởi $4y \le x^2+y^2 \le 8y$ và $x \le y \le \sqrt{3}x$.

6. Tính các tích phân kép sau:

(a) $I = \int\limits_D (x+y)\, d(x,y)$, D giới hạn bởi $x^2+y^2 = 2x+2y$.

(b) $I = \int\limits_D \left(1 - \frac{x^2}{y^2}\right) d(x,y)$, D giới hạn bởi $1 \le x^2+y^2 \le 2y$.

(c) $I = \int\limits_D |9x^2-4y^2|\, d(x,y)$, D giới hạn bởi $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \le 1$.

(d) $I = \int\limits_D |2x - x^2 - y^2|\, d(x,y)$, D giới hạn bởi $x^2+y^2 \le 2y$.

7. Tính các tích phân ba lớp sau:

(a) $I = \int\limits_D (x+y)\, d(x,y,z)$, D giới hạn bởi các mặt phẳng tọa độ và mặt phẳng $x+y+2z = 2$.

(b) $I = \int\limits_D (x^2+y^2)\, d(x,y,z)$, D giới hạn bởi $x^2+y^2+z^2 \le 1$ và $x^2+y^2-z^2 \le 0$.

(c) $I = \int\limits_D z(x^2+y^2)\, d(x,y,z)$, D giới hạn bởi $x^2+y^2 \le 1$ và $1 \le z \le 2$.

(d) $I = \int\limits_D z\sqrt{x^2+y^2}\, d(x,y,z)$, D giới hạn bởi $x^2+y^2 = 2x$, $z = 0$ và $z = a$ $(a > 0)$.

(e) $I = \int\limits_D y\, d(x,y,z)$, D giới hạn bởi $y = \sqrt{x^2+z^2}$ và $y = h$ $(h > 0)$.

(f) $I = \int\limits_D (x^2+y^2)\, d(x,y,z)$, D giới hạn bởi $z = x^2+y^2$, $z = 1$ và $z = 4$.

(g) $I = \int\limits_D \sqrt{x^2+y^2+z^2}\, d(x,y,z)$, D giới hạn bởi $x^2+y^2+z^2 \leq z$.

8. Cho $D \subset \mathbb{R}^2$ là miền bị chặn và hàm $f: D \to \mathbb{R}$ liên tục trên D. Giả sử D đối xứng qua trục Ox và f là hàm lẻ theo biến y, nghĩa là

$$f(x,-y) = -f(x,y), \quad \forall (x,y) \in D.$$

Chứng minh rằng $\int_D f(x,y)d(x,y) = 0$.

9. Dùng phương pháp tương tự Bài tập 8, tính các tích phân sau:

(a) $I = \int\limits_D xy\, d(x,y)$, D giới hạn bởi $(x-2)^2+y^2 \leq 1$.

(b) $I = \int\limits_D (x+y)\, d(x,y)$, D giới hạn bởi $x^2+y^2 = 4x+4y$.

(c) $I = \int\limits_D xy^2\, d(x,y)$, D giới hạn bởi $x^2+(y-1)^2 = 1$ và $x^2+y^2-4y = 0$.

(d) $I = \int\limits_D (z-1)e^{x^2+y^2}\, d(x,y,z)$, D giới hạn bởi $z = 0, z = 2$ và $x^2+y^2 = \frac{1}{4}$.

10. Cho hộp đóng $B = [a_1,b_1] \times [a_2,b_2] \times ... \times [a_n,b_n]$. Tính tích phân $I = \int_B f(x)dx$ trong các trường hợp sau:

(a) $f(x) = x_1.x_2.....x_n$, $x = (x_1,x_2,...,x_n)$.

(b) $f(x) = x_1+x_2+...+x_n$, $x = (x_1,x_2,...,x_n)$.

11. Chứng minh rằng nếu hàm f liên tục trên hộp đóng $[a,b]\times[c,d]$ thì hàm $F(y) = \int_a^b f(x,y)dx$ liên tục trên $[c,d]$.

12. Cho tập hợp A xác định như sau:

$$A = \left\{(2^{-m}p, 2^{-m}q): \ m \in \mathbb{Z}^+ \text{ và } p,q \text{ là các số nguyên lẻ}\right\}.$$

Xét hàm số

$$f(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{nếu } (x,y) \in A, \\ 0, & \text{nếu } (x,y) \notin A. \end{cases}$$

(a) Chứng minh rằng hàm f không khả tích trên bất kỳ hình chữ nhật $B = [a, b] \times [c, d]$ nào ($a < b, c < d$).

(b) Chứng minh hai tích phân lặp của f trên B đều tồn tại.

13. Cho $r > 0$ và $B_r = [0, r] \times [0, r]$. Tính giới hạn sau bằng hai cách

$$I = \lim_{r \to +\infty} \int_{B_r} \sin x e^{-xy} \, d(x, y)$$

để chứng minh rằng

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$$

Từ đó suy ra

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin ax}{x} dx = \frac{\pi}{2},$$

với mọi tham số $a > 0$.

Chương 6

Tích phân đường

6.1 Đường cong trong $\mathbb{R}^n$

6.1.1 Định nghĩa

Định nghĩa 6.1.1. *Cho $I \subseteq \mathbb{R}$ và các hàm số liên tục $X_1, X_2, ..., X_n : I \to \mathbb{R}$. Khi đó, tập hợp*

$$C = \{X(t) := (X_1(t), X_2(t), ..., X_n(t)) : \quad t \in I\}$$

được gọi là đường cong C với phương trình tham số $X = X(t)$ trong $\mathbb{R}^n$.

Ta nói đường cong C là

- trơn nếu X là hàm khả vi liên tục;
- trơn từng khúc nếu X khả vi liên tục, ngoại trừ một số hữu hạn điểm trên I;
- kín nếu $I = [a, b]$ và $X(a) = X(b)$.

Với ứng dụng trong các ngành khoa học khác như Vật lý và Cơ học, hai trường hợp được nghiên cứu phổ biến nhất là khi $n = 2$ và $n = 3$.

Ví dụ 6.1.2.

1. Đường cong C có phương trình tham số $X(t) = (\cos t, \sin t),\ t \in [0, 2\pi]$ là đường tròn tâm O bán kính $R = 1$ trong $\mathbb{R}^2$. Đây là đường cong kín, trơn.
2. Đường cong C có phương trình tham số $X(t) = (\sin^2 t, \sin t \cos t, \cos t)$, $t \in [0, 2\pi]$ là đường cong kín, trơn trong $\mathbb{R}^3$.
3. Đường cong C có phương trình tham số $X(t) = (t, t^2),\ t \in [0, 1]$ là parabol $y = x^2$.

6.1.2 Độ dài đường cong

Ví dụ 6.1.3. Xét bài toán Vật lý sau đây. Một vật chuyển động từ thời điểm $t = a$ đến thời điểm $t = b$ với phương trình chuyển động là $X = X(t) \in \mathbb{R}^n$ (nghĩa là tại thời điểm t, tọa độ của vật là $X(t)$). Giả sử rằng đường cong C với phương trình tham số $X = X(t),\ t \in [a, b]$ trơn. Tính độ dài quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian từ a tới b.

Lời giải.
Xét phân hoạch P của đoạn $[a, b]$

$$P: \quad t_0 = a < t_1 < ... < t_{N-1} < t_N = b.$$

Xét tổng tương ứng với độ dài đường gấp khúc

$$S(X, P) = \sum_{k=1}^{N} \|X(t_k) - X(t_{k-1})\|.$$

Ta thấy rằng độ dài quãng đường S mà vật đi được trong khoảng thời gian a đến b chính là

$$S = \lim_{d(P)\to 0} S(X, P).$$

Mặt khác, ta có

$$S(X, P) = \sum_{k=1}^{N} \left\| \frac{X(t_k) - X(t_{k-1})}{t_k - t_{k-1}} \right\| (t_k - t_{k-1}).$$

Áp dụng định lý Lagrange, ta thu được

$$\sum_{k=1}^{N} \min_{t\in[t_{k-1},t_k]} \|X'(t)\|(t_k - t_{k-1}) \le S(X, P) \le \sum_{k=1}^{N} \max_{t\in[t_{k-1},t_k]} \|X'(t)\|(t_k - t_{k-1}).$$

Đặt $f(t) = \|X'(t)\|,\ t \in [a, b]$ thì hàm f khả tích trên $[a, b]$. Theo định nghĩa tích phân của hàm f trên $[a, b]$ ta suy ra được

$$S = \lim_{d(P)\to 0} S(X, P) = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b \|X'(t)\|dt. \qquad \square$$

Từ bài toán trên ta có công thức tính độ dài đường cong C với phương trình tham số $X = X(t),\ t \in [a, b]$ như sau:

$$s(C) = \int_a^b \|X'(t)\|dt = \int_a^b \sqrt{[X_1'(t)]^2 + [X_2'(t)]^2 + ... + [X_n'(t)]^2}dt.$$

Ví dụ 6.1.4. Tính độ dài đường cong C có phương trình tham số

$$X(t) = (a\cos^3 t, a\sin^3 t), \quad t \in [0, \pi/2].$$

6.2 Tích phân đường loại I

6.2.1 Định nghĩa

Cho C là đường cong trơn trong $\mathbb{R}^n$ với điểm đầu là A, điểm cuối là B và hàm $f: C \to \mathbb{R}$.

- Gọi P là phân hoạch đường cong C với các điểm chia nối tiếp nhau $A_0 = A, A_1, ..., A_N = B$.
- Ký hiệu s_k là độ dài cung $A_{k-1}A_k$.
- Đường kính phân hoạch P là $d(P) = \max\{s_k,\ k = \overline{1, N}\}$.
- Trên cung $A_{k-1}A_k$ chọn điểm c_k tùy ý, ta có phép chọn C.

Ta xét tổng:

$$S(f, P, C) = \sum_{k=1}^{N} f(c_k)s_k.$$

Định nghĩa 6.2.1. *Nếu* $\lim\limits_{d(P)\to 0} S(f, P, C) = I$ *hữu hạn, ta nói* I *là tích phân đường loại I của hàm* f *trên* C *và ký hiệu* $I = \int_C f(x)ds$.

6.2.2 Tính chất

Tính chất 6.2.2. *Các tính chất sau đây có thể suy ra trực tiếp từ định nghĩa.*

i) $\int_C \alpha f(x)ds = \alpha \int_C f(x)ds.$

ii) $\int_C (f(x) + g(x))ds = \int_C f(x)ds + \int_C g(x)ds.$

iii) $C = \overset{\frown}{AB}$, *ta có* $\int_{\overset{\frown}{AB}} f(x)ds = \int_{\overset{\frown}{BA}} f(x)ds.$

iv) $\int_{\overset{\frown}{AB}} f(x)ds = \int_{\overset{\frown}{AC}} f(x)ds + \int_{\overset{\frown}{CB}} f(x)ds.$

v) Nếu $f(x) \geq 0$ *trên* C *thì* $\int_C f(x)ds \geq 0$.

vi) $\left|\int_C f(x)ds\right| \leq \int_C |f(x)|ds.$

vii) Nếu f *liên tục trên* C *thì tồn tại* x_0 *sao cho*

$$\int_C f(x)ds = f(x_0)s(C),$$

với $s(C)$ *là độ dài cung* C.

viii) Nếu C *có phương trình tham số* $X = X(t)$, $t \in [a, b]$ *thì ta có:*

$$\int_C f(x)ds = \int_a^b f(x).\|X'(t)\|\ dt.$$

Ví dụ 6.2.3.

1. Cho C là đoạn parabol $x = y^2$ giữa $A(0,0)$ và $B(1,1)$.
   Tính $I = \int_C xyds$.

2. Cho C là đường cong có phương trình tham số

$$X(t) = (\sin 2t, \sin t \cos t, \cos t),\ \ t \in [0, \pi/2].$$

   Tính $I = \int_C zds$.

6.3 Tích phân đường loại II

6.3.1 Định nghĩa và tính chất

Cho C là đường cong trơn trong $\mathbb{R}^2$ với điểm đầu là A, điểm cuối là B và hàm $f :\ C \to \mathbb{R}$.

- Gọi P là phân hoạch đường cong C với các điểm chia nối tiếp nhau $A_0 = A, A_1, ..., A_N = N$.
- Gọi $(x_k,\, y_k)$ là tọa độ của A_k trong $\mathbb{R}^2$.
- Ký hiệu $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ và $\Delta y_k = y_k - y_{k-1}$.
- Đường kính phân hoạch P là $d(P) = \max\{|\Delta x_k|, |\Delta y_k|,\ k = \overline{1, N}\}$.

- Trên cung $A_{k-1}A_k$ chọn điểm c_k tùy ý, ta có phép chọn C.

Ta xét tổng:

$$S_x(f,P,C)=\sum_{k=1}^{N} f(c_k)\Delta x_k \text{ và } S_y(f,P,C)=\sum_{k=1}^{N} f(c_k)\Delta y_k.$$

Định nghĩa 6.3.1. *Nếu* $\lim\limits_{d(P)\to 0} S_x(f,P,C)=I_1$ *và* $\lim\limits_{d(P)\to 0} S_y(f,P,C)=I_2$ *hữu hạn, ta nói* I_1, I_2 *là các tích phân đường loại II của hàm* f *trên* C *đối với* x *và* y*, ta ký hiệu*

$$I_1=\int_C f(x,y)dx, \qquad I_2=\int_C f(x,y)dy.$$

Trong ứng dụng, người ta thường tính tích phân đường loại II theo cả x và y

$$I=\int_C f(x,y)dx+g(x,y)dy.$$

Tính chất 6.3.2. *Giả sử đường cong* C *trơn, cho bởi phương trình tham số*

$$x=x(t), \quad y=y(t), \quad t\in[a,b].$$

i) Ta có

$$I_1=\int_a^b f(x(t),y(t)).x'(t)\ dt,$$
$$I_2=\int_a^b f(x(t),y(t)).y'(t)\ dt.$$

Do đó

$$\begin{aligned} I&=\int_C f(x,y)dx+g(x,y)dy\\ &=\int_a^b f(x(t),y(t)).x'(t)+g(x(t),y(t)).y'(t)\ dt.\end{aligned}$$

ii) Giả sử $A=(x(a),y(a)), B=(x(b),y(b))$*. Tích phân đường loại I không phụ thuộc vào việc chọn* A,B *là điểm đầu hay điểm cuối nhưng tích phân đường loại II thì khác, nghĩa là*

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} f(x)ds=\int_{\overset{\frown}{BA}} f(x)ds,$$
$$\int_{\overset{\frown}{AB}} f(x,y)dx=-\int_{\overset{\frown}{BA}} f(x,y)dx.$$

iii) Các tính chất còn lại của tích phân đường loại II tương tự tích phân đường loại I.

Ví dụ 6.3.3. Tính các tính phân đường loại II sau:

a) $I = \int_{\overset{\frown}{AB}} (x^2 - 2xy)dx + (2xy - y^2)dy$, $\overset{\frown}{AB}$ là cung parabol $y = x^2$ từ $A(1, 1)$ đến $B(2, 4)$.

b) $I = \int_C (x^2 - 2xy)dx + (2xy - y^2)dy$, C là đường cong $\begin{cases} x = 3(1 - \sin t), \\ y = 3(1 - \cos t), \end{cases}$ với $0 \leq t \leq 2\pi$, theo chiều tăng của t.

c) $I = \int_{OABO} 2(x^2 + y^2)dx + x(4y + 3)dy$, $OABO$ là đường gấp khúc đi qua $O(0, 0)$, $A(1, 1)$, $B(0, 2)$.

d) $I = \int_C \left(3y - e^{\sin x}\right) dx + \left(7x + \sqrt{y^4 + 1}\right) dy$, trong đó C là đường tròn $x^2 + y^2 = 9$ đi từ $A(3, 0)$ theo hướng ngược chiều kim đồng hồ.

6.3.2 Tích phân trên đường cong kín

Định nghĩa 6.3.4. *Cho C là đường cong trơn, kép kín trong $\mathbb{R}^2$ và D là miền bị chặn giới hạn bởi đường cong C. Người ta quy ước gọi hướng dương của đường cong C là hướng sao cho nếu đi dọc theo hướng đó thì miền D luôn nằm ở phía trái. Khi đó, tích phân đường loại II của hàm f và g theo hướng dương thường được ký hiệu là:*

$$I = \oint_C f(x, y)dx + g(x, y)dy.$$

Định lý 6.3.5 (Định lý Green)**.** *Cho miền D trong $\mathbb{R}^2$ liên thông, được giới hạn bởi đường cong C kín, trơn. Khi đó, nếu các hàm hai biến P, Q có các đạo hàm riêng liên tục trên D thì*

$$\oint_C P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) d(x, y).$$

Chứng minh. Ta chứng minh công thức Green cho trường hợp đơn giản. Đối với trường hợp tổng quát, ta chia miền D thành nhiều miền dạng đơn

giản. Giả sử miền D có thể biểu diễn thành miền dạng 1:

$$D = \{a \leq x \leq b,\ \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\}.$$

Ứng với tích phân trên miền dạng 1, ta có:

$$\begin{aligned}\int_D \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)d(x,y) &= \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)dy \\ &= \int_a^b \left[P(x,\varphi_2(x)) - P(x,\varphi_1(x))\right] dx.\end{aligned}$$

Mặt khác, ta có thể tính tích phân đường dưới dạng:

$$\begin{aligned}\oint_C P(x,y)dx &= \int_{x=a} P(x,y)dx + \int_{y=\varphi_1(x)} P(x,y)dx + \int_{x=b} P(x,y)dx \\ &\quad + \int_{y=\varphi_2(x)} P(x,y)dx \\ &= \int_a^b P(x,\varphi_1(x))dx + \int_b^a P(x,\varphi_2(x))dx.\end{aligned}$$

Từ hai đẳng thức trên ta suy ra

$$\oint_C P(x,y)dx = -\int_D \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)d(x,y).$$

Hoàn toàn tương tự, biểu diễn D thành miền dạng 2, ta thu được:

$$\oint_C Q(x,y)dy = \int_D \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)d(x,y).$$

□

Ví dụ 6.3.6. Tính các tích phân sau:

a) $I = \oint_C \left(3y - e^{\sin x}\right) dx + \left(7x + \sqrt{y^4+1}\right) dy$, trong đó C là đường tròn $x^2 + y^2 = 9$.

b) $I = \oint_C (e^{x^2} + y)dx + (x^2 + 1/\tan\sqrt{y})dy$, với C là biên của hình chữ nhật có các đỉnh $(1,2), (5,2), (5,4), (1,4)$.

Lời giải câu a): Đặt $P(x,y) = 3y - e^{\sin x}$, $Q(x,y) = 7x + \sqrt{y^4+1}$ và D là hình tròn $x^2+y^2 \leq 9$. Áp dụng Định lý Green, ta có:

$$I = \int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) d(x,y) = \int_D 4d(x,y) = 4S(D) = 36\pi.$$

Ta thấy bài tập này nếu sử dụng phương pháp trong Ví dụ 6.3.3 thì gần như không tính được. Nhưng khi sử dụng Định lý Green lại trở thành một bài tập rất đơn giản. Ví dụ này cho thấy sự hiệu quả khi áp dụng Định lý Green trong một số trường hợp đặc biệt.

6.3.3 Định lý bốn mệnh đề tương đương

Định lý 6.3.7. *Giả sử các hàm hai biến P, Q có các đạo hàm riêng liên tục trên miền D liên thông và đơn liên. Khi đó, bốn mệnh đề sau là tương đương:*

(1) $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{\partial P}{\partial y}, \quad \forall (x,y) \in D.$

(2) $\displaystyle\oint_L Pdx + Qdy = 0$, *với L là đường cong kín bất kỳ nằm trong D.*

(3) $\displaystyle\int_{\overset{\frown}{AB}} Pdx + Qdy$ *không phụ thuộc vào đường đi từ A đến B với mọi đường cong AB nằm trong D.*

(4) Biểu thức $Pdx + Qdy$ là vi phân toàn phần của hàm $U(x,y)$ nào đó trên D.

Chứng minh. Hai mệnh đề (1) $\Rightarrow$ (2) và (2) $\Rightarrow$ (3) được suy ra dễ dàng từ công thức Green. Mệnh đề (4) $\Rightarrow$ (1) suy ra từ định lý Schwarz về thứ tự lấy đạo hàm riêng. Ta sẽ chứng minh mệnh đề (3) $\Rightarrow$ (4).
Ta cố định $(x_0, y_0) \in U$ và xét hàm

$$U(x,y) = \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} Pdx + Qdy, \quad (x,y) \in U.$$

Ta chứng minh

$$\frac{\partial U}{\partial x}(x,y) = P(x,y) \quad \text{và} \quad \frac{\partial U}{\partial y}(x,y) = Q(x,y).$$

Thật vậy, ta có:

$$U(x+\Delta x, y) - U(x,y) = \int_{(x,y)}^{(x+\Delta x, y)} Pdx + Qdy = \int_{x}^{x+\Delta x} P(x,y)dx.$$

Mặt khác, áp dụng định lý trung bình tích phân, tồn tại c_x nằm giữa x và $x+\Delta x$ sao cho:

$$\int_{x}^{x+\Delta x} P(x,y)dx = P(c_x, y)\Delta x.$$

Từ đây suy ra

$$\frac{U(x+\Delta x, y) - U(x,y)}{\Delta x} = P(c_x, y),$$

nên khi cho $\Delta x \to 0$, ta được

$$\frac{\partial U}{\partial x}(x,y) = P(x,y).$$

Đạo hàm riêng còn lại được chứng minh hoàn toàn tương tự. □

Hệ quả 6.3.8. *Nếu $Pdx + Qdy$ là vi phân toàn phần của hàm $U(x,y)$ trên $\mathbb{R}^2$ thì hàm U cho bởi công thức:*

$$U(x,y) = \int_{x_0}^{x} P(x,y)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x_0,y)dy + C,$$

hoặc

$$U(x,y) = \int_{x_0}^{x} P(x,y_0)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x,y)dy + C,$$

với C là hằng số.

Chứng minh. Hệ quả này được suy ra trực tiếp từ chứng minh của Định lý 6.3.7. □

BÀI TẬP CHƯƠNG 6

Mục tiêu cơ bản của Chương 6:

- Giải thích được cách xây dựng định nghĩa tích phân đường loại I và tích phân đường loại II.
- Vận dụng được phương pháp tính tích phân đường loại I và loại II bằng dạng tham số của đường cong.
- Phân tích được mối liên hệ giữa tích phân đường loại II trên đường cong kín và tích phân hai lớp, từ đó áp dụng công thức Green để tính tích phân trên đường cong kín.
- Giải thích được định lý bốn mệnh đề tương đương và vận dụng định lý để tính tích phân đường loại II.

1. Tính các tích phân đường loại I sau:

   (a) $\int_C y^3 ds, \quad C: \ x = t^3, \ y = t, \ 0 \leq t \leq 2.$

   (b) $\int_C xyds, \quad C: \ x = t^2, \ y = 2t, \ 0 \leq t \leq 1.$

   (c) $\int_C xy^4 ds, \quad C$ là nửa bên phải của đường tròn $x^2 + y^2 = 16$.

   (d) $\int_C x \sin y ds, \quad C$ là đoạn thẳng nối từ điểm $(0, 3)$ đến $(4, 6)$.

   (e) $I = \int_C \sqrt{x^2 + y^2} ds$, C là đường cong

   $$\begin{cases} x = a(\cos t + t \sin t) \\ y = a(\sin t - t \cos t) \end{cases}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi, \ a > 0.$$

2. Tính các tích phân đường loại II sau:

   (a) $\int_C (x^2 y^3 - \sqrt{x}) dy, \quad C$ là một cung của đường cong $y = \sqrt{x}$ nối từ điểm $(1, 1)$ đến $(4, 2)$.

   (b) $\int_C e^x dx, \quad C$ là một cung của đường $x = y^3$ từ $(-1, -1)$ đến $(1, 1)$.

(c) $\int_C (x+2y)dx + x^2dy$, C là đường gấp khúc $(0,0)$-$(2,1)$-$(3,0)$.

(d) $\int_C x^2dx + y^2dy$, C chứa một cung của đường tròn $x^2+y^2=4$ từ điểm $(2,0)$ đến $(0,2)$ nối tiếp đoạn thẳng từ điểm $(0,2)$ đến $(4,3)$.

(e) $I = \int_C \frac{\sqrt[4]{x^2+y^2}}{2}dx + dy$, C là đường cong $\begin{cases} x = t\sin\sqrt{t}, \\ y = t\cos\sqrt{t}, \end{cases}$ với $0 \le t \le \frac{\pi^2}{4}$, theo chiều tăng của t.

3. Tính các tích phân đường sau bằng hai cách: trực tiếp và công thức Green.

   (a) $\oint_C (x-y)dx + (x+y)dy$, C là đường tròn có tâm tại gốc tọa độ và bán kính bằng 2.

   (b) $\oint_C xydx + x^2dy$, C là hình chữ nhật có các đỉnh $(0,0), (3,0), (3,1)$ và $(0,1)$.

   (c) $\oint_C xydx + x^2y^3dy$, C là hình tam giác có các đỉnh $(0,0), (1,0)$ và $(1,2)$.

   (d) $\oint_C x^2y^2dx + xydy$, C chứa một cung của đường parabol $y = x^2$ từ điểm $(0,0)$ đến $(1,1)$ và đoạn thẳng nối từ điểm $(1,1)$ đến $(0,1)$ và từ điểm $(0,1)$ đến $(0,0)$.

4. Áp dụng định lý Green tính các tích phân đường sau:

   (a) $\oint_C xy^2dx + 2x^2ydy$, C là hình tam giác có các đỉnh $(0,0), (2,2)$ và $(2,4)$.

   (b) $\oint_C \cos ydx + x^2\sin ydy$, C là hình chữ nhật có các đỉnh $(0,0), (5,0), (5,2)$ và $(0,2)$.

   (c) $\oint_C (y+e^{\sqrt{x}})dx + (2x+\cos y^2)dy$, C là đường giới hạn bởi các parabol $y = x^2$ và $x = y^2$.

   (d) $\oint_C y^4dx + 2xy^3dy$, C là đường ellipse $x^2 + 2y^2 = 2$.

(e) $\oint_C y^3dx - x^3dy$, C là đường tròn $x^2+y^2=4$

(f) $\oint_C (1-y^3)dx + (x^3+e^{y^2})dy$, C là đường giới hạn bởi hai đường tròn $x^2+y^2=4$ và $x^2+y^2=9$.

(g) $\oint_C x\left(y+\frac{x}{4}\right)dx - y\left(x+\frac{y}{4}\right)dy$, với C là đường tròn $x^2+y^2=a^2$ $(a>0)$.

(h) $\oint_C \left(x^2y^4+x^2+ye^{xy}\right)dx+\left(\frac{x^3}{3}+xy^2-x+xe^{xy}\right)dy$, với C là đường tròn $x^2+y^2=2x$.

5. Tính các tích phân đường sau:

(a) $\int_{(1,0)}^{(2,3)} (y^2+1)^{\frac{3}{2}}dx + (y^2+3xy\sqrt{y^2+1})dy$.

(b) $\int_{\overset{\frown}{AB}} \left(1-\frac{y^2}{x^2}\cos\frac{y}{x}\right)dx+\left(\sin\frac{y}{x}+\frac{y}{x}\cos\frac{y}{x}\right)dy$, với $A(1,\pi)$, $B(2,\pi)$ và $\overset{\frown}{AB}$ không cắt trục Oy.

(c) $\int_{\overset{\frown}{AB}} \frac{x^2+y^2}{xy}\left(\frac{3x^2-y^2}{x}dx+\frac{3y^2-x^2}{y}dy\right)$, với $A(1,1)$, $B(\pi/2,2)$, $\overset{\frown}{AB}$ có phương trình $x=t+\cos^2 t,\ y=1+\sin^2 t$, với $0\le t\le \pi/2$ và không cắt các trục tọa độ.

(d) $\int_{\overset{\frown}{AB}} \frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}$, với $A(1,1)$, $B(2,4)$ trong hai trường hợp cung $\overset{\frown}{AB}$ tạo với đoạn AB thành đường cong kín không bao gốc tọa độ và bao gốc tọa độ.

6. Chứng minh rằng các biểu thức $Pdx+Qdy$ là vi phân toàn phần của hàm U nào đó và tìm U trong các trường hợp sau đây:

(a) $P(x,y)=x^2-2xy^2+3,\ Q(x,y)=y^2-2x^2y+3$.

(b) $P(x,y)=e^{x+y}+\cos(x-y),\ Q(x,y)=e^{x+y}-\cos(x-y)+2$.

(c) $P(x,y)=e^x(e^y(x-y+2)+y),\ Q(x,y)=e^x(e^y(x-y)+1)$.

(d) $P(x,y)=\frac{x}{x^2+y^2},\ Q(x,y)=\frac{y(1-x^2-y^2)}{x^2+y^2}$.

Chương 7

Tích phân mặt

7.1 Mặt cong trong $\mathbb{R}^3$

7.1.1 Định nghĩa

Định nghĩa 7.1.1. *Giả sử U là một miền liên thông trong mặt phẳng và ba ánh xạ liên tục $x, y, z: U \to \mathbb{R}$. Khi đó tập*

$$S = \{X = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ X = X(u, v), \ (u, v) \in U\}$$

được gọi là một mặt cong trong $\mathbb{R}^3$, ứng với phương trình tham số $X = X(u, v)$.

Ta nói mặt cong S là

- trơn nếu các ánh xạ x, y, z là khả vi liên tục trên U và ma trận Jacobi

$$J_X = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial u} \\ \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial v} & \dfrac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix}$$

  có hạng bằng 2 với mọi (u, v) thuộc $\mathring{U}$.

- trơn từng mảnh nếu U có thể phân thành hữu hạn miền mà mặt cong S là trơn trên mỗi miền con.

Ví dụ 7.1.2. Mặt cầu đơn vị trong $\mathbb{R}^3$ có phương trình tham số:

$$\begin{cases} x = \cos\varphi \sin\theta, \\ y = \sin\varphi \sin\theta, \\ z = \cos\theta, \end{cases}$$

với $(\varphi, \theta) \in [0, 2\pi] \times [0, \pi]$.

Ma trận Jacobi của phương trình tham số là

$$J = \begin{pmatrix} -\sin\varphi\sin\theta & \cos\varphi\sin\theta & 0 \\ \cos\varphi\cos\theta & \sin\varphi\cos\theta & -\sin\theta \end{pmatrix}.$$

Ta thấy rằng rank $J = 2$ với mọi $(\varphi, \theta) \in (0, 2\pi) \times (0, \pi)$ nên mặt cầu là một mặt cong trơn.

7.1.2 Mặt tiếp tuyến và pháp tuyến

Cho S là mặt cong trơn trong $\mathbb{R}^3$ có phương trình tham số $X = X(u, v)$, $(u, v) \in U$ và điểm $P_0 = X(u_0, v_0) \in S$. Xét hai vector

$$X_u^0 = \left(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u}\right)(u_0, v_0),$$

$$X_v^0 = \left(\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v}\right)(u_0, v_0).$$

Vì ma trận Jacobi của X tại (u_0, v_0) có hạng bằng 2 nên hai vector X_u^0, X_v^0 độc lập tuyến tính.

Định nghĩa 7.1.3. *Mặt phẳng đi qua P và sinh bởi hai vector X_u^0, X_v^0 được gọi là mặt tiếp tuyến của S tại P_0.*

Từ định nghĩa, ta dễ dàng viết được phương trình của mặt tiếp tuyến với S tại P_0 như sau:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0,$$

với $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ và $(A, B, C) = X_u^0 \times X_v^0$ là vector pháp tuyến của mặt tiếp tuyến.

Ta định nghĩa vector pháp tuyến đơn vị của S tại P_0 là

$$n_{\pm} = \pm\frac{(A, B, C)}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Ví dụ 7.1.4. Tìm vector pháp tuyến đơn vị của mặt cầu đơn vị tại $X_0 = (x_0, y_0, z_0)$ bất kỳ trên mặt cầu.

Lời giải: Với mặt cầu đơn vị, hai vector chỉ phương của mặt phẳng tiếp tuyến tại điểm X_0 là

$$X_\varphi^0 = (-\sin\varphi_0\sin\theta_0,\ \cos\varphi_0\sin\theta_0,\ 0),$$
$$X_\theta^0 = (\cos\varphi_0\cos\theta_0,\ \sin\varphi_0\cos\theta_0,\ -\sin\theta_0).$$

Ta suy ra vector pháp tuyến của mặt tiếp tuyến tại X_0 có tọa độ là

$$A = \sin^2\varphi_0\cos\theta_0,$$
$$B = \sin^2\varphi_0\sin\theta_0,$$
$$C = \cos\varphi_0\sin\varphi_0.$$

Tính toán trực tiếp ta thu được vector pháp tuyến đơn vị là $n_\pm = \pm X_0$. □

7.1.3 Diện tích mặt cong

Cho S là mặt cong trơn có phương trình tham số $X = X(u, v),\ (u, v) \in U$ với U là miền bị chặn. Ta có thể phân hoạch mặt cong S thành nhiều mặt con, mà mỗi mặt con có thể được xấp xỉ bởi một hình bình hành tiếp tuyến.

Khi đó, ta chứng minh được tổng diện tích của các hành bình hành này sẽ tiến tới đại lượng được gọi là diện tích của mặt cong S, ký hiệu $\mathrm{Area}(S)$. Ta có:

$$\mathrm{Area}(S) = \int_U \|X_u \times X_v\|\ d(u, v).$$

Ngoài ra, bằng cách sử dụng đẳng thức

$$\|X_u \times X_v\|^2 = \|X_u\|^2.\|X_v\|^2 - (X_u \cdot X_v)^2,$$

ta có công thức thứ hai để tính diện tích mặt cong S:

$$\mathrm{Area}(S) = \int_U \sqrt{\|X_u\|^2.\|X_v\|^2 - (X_u \cdot X_v)^2}\ d(u, v).$$

Ví dụ 7.1.5.

a) Tính diện tích mặt cầu đơn vị.

b) Tính diện tích mặt paraboloid xác định bởi $z = x^2 + y^2,\ 0 \le z \le 2$.

Lời giải:

a) Với phương trình mặt cầu, ta có $\|X_\varphi \times X_\theta\| = \sin\theta$ nên diện tích mặt cầu là

$$\mathrm{Area}(S) = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin\theta d\theta = 4\pi.$$

b) Với phương trình mặt paraboloid có phương trình $X = X(x, y)$, $(x, y) \in D$ với

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\ x^2 + y^2 \le 2\}.$$

Ta tính được $\|X_x \times X_y\| = \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}$ nên diện tích mặt paraboloid là

$$\text{Area}(S) = \int_D \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}\ d(x, y).$$

Bằng cách đổi biến trong tọa độ cực, ta được

$$\text{Area}(S) = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{4r^2 + 1}.r\ dr = \frac{13\pi}{3}. \qquad \square$$

7.2 Tích phân mặt loại I

7.2.1 Định nghĩa

Cho S là mặt cong trơn, bị chặn trong $\mathbb{R}^3$ và hàm ba biến $f: S \to \mathbb{R}$.

- Xét phân hoạch P của mặt cong S, chia mặt cong S thành N mảnh $S_1, S_2, ..., S_N$ không chồng lên nhau.
- Đặt $\Delta S_k = \text{Area}(S_k)$, $k = 1, 2, .., N$.
- Đường kính của P là $d(P) = \max\{S_k,\ k = 1, 2, ..., N\}$.
- Trên mỗi mảnh S_k, chọn một điểm C_k tùy ý, ta có phép chọn C.
- Xét tổng $S(f, P, C) = \sum\limits_{k=1}^{N} f(C_k).\Delta S_k$.

Định nghĩa 7.2.1. *Nếu* $\lim\limits_{d(P)\to 0} S(f, P, C) = I$ *hữu hạn, ta nói* I *là tích phân mặt loại I của hàm* f *trên* S*, ký hiệu* $I = \int_S f(x, y, z)dS$.

7.2.2 Công thức tính

Giả sử mặt cong S có phương trình tham số $X = X(u, v)$, $(u, v) \in U$, với U bị chặn. Tương tự cách xây dựng công thức tích phân đường loại I, ta cũng có thể xây dựng được công thức tính tích phân mặt loại I như sau

$$I = \int_S f(x, y, z)dS = \int_U f(X(u, v)).\|X_u \times X_v\|\ d(u, v).$$

Ví dụ 7.2.2. Tính $I = \int_S z dS$ với S là nửa mặt cầu đơn vị

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 :\ x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ z \geq 0\}.$$

Lời giải: Phương trình tham số của mặt S là:

$$\begin{cases} x = \cos\varphi \sin\theta, \\ y = \sin\varphi \sin\theta, \\ z = \cos\theta, \end{cases} \quad \text{với } (\varphi, \theta) \in [0, 2\pi] \times [0, \pi/2].$$

Ta có $\|X_\varphi \times X_\theta\| = \sin\theta$ nên $I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} \cos\theta \sin\theta \, d\theta = \pi$. □

Tích phân mặt loại I cũng có những tính chất hoàn toàn tương tự tích phân đường loại I.

7.3 Tích phân mặt loại II

7.3.1 Mặt cong định hướng

Cho S là mặt cong trơn. Tại mỗi điểm $P \in S$, ta có hai vector pháp tuyến đơn vị ngược chiều nhau là n_+ và n_-. Khi P di chuyển dọc theo một đường cong kín, đơn trên S thì n_+ cũng di chuyển một cách liên tục về chính nó. Khi ấy ta nói mặt cong S là mặt được định hướng. Tập hợp các vector $n_+(P)$, $\forall P \in S$ xác định một phía của mặt cong.

Khi mặt cong không kín định hướng được, người ta thường dùng phía trên để chỉ hướng xác định bởi vector $n_+(P)$ và phía dưới cho hướng ngược lại.

Khi mặt cong kín định hướng được, người ta hường dùng phía trong và phía ngoài để mô tả hướng đã xác định.

7.3.2 Định nghĩa tích phân mặt loại II

Cho S là mặt cong trơn, bị chặn trong $\mathbb{R}^3$ và các hàm ba biến $f, g, h : S \to \mathbb{R}$.

- Xét phân hoạch P của mặt cong S, chia mặt cong S thành N mảnh $S_1, S_2, ..., S_N$ không chồng lên nhau.
- Đặt ΔD_k là diện tích hình chiếu của S_k lên mặt phẳng Oxy kèm theo dấu xác định theo quy tắc: nếu S_k định hướng phía trên thì ΔD_k có dấu dương, ngược lại thì dấu âm.
- Đường kính của P là $d(P) = \max\{|\Delta D_k|,\ k = 1, 2, ..., N\}$.
- Trên mỗi mảnh S_k, chọn một điểm C_k tùy ý, ta có phép chọn C.

- Xét tổng $S(h, P, C) = \sum_{k=1}^{N} h(C_k).\Delta D_k$.

Định nghĩa 7.3.1. *Nếu* $\lim_{d(P)\to 0} S(h, P, C)$ *tồn tại hữu hạn, ta nói đây là một tích phân mặt loại II của hàm* h *trên* S*, ký hiệu là* $\int_S h(x, y, z)dxdy$.

Tương tự, bằng cách xây dựng hình chiếu lên các mặt Oyz *và* Oxz *ứng với các hàm* g, h*, ta định nghĩa tích phân mặt loại II của các hàm* f, g, h *trên* S *là*

$$I = \int_S f(x, y, z)dydz + g(x, y, z)dzdx + h(x, y, z)dxdy.$$

7.3.3 Công thức tính

Giả sử mặt cong S trơn và có phương trình tham số $X = X(u, v)$, $(u, v) \in U$. Ta có thể xây dựng được công thức tích tích phân đường loại II như sau:

$$I = \int_S f dydz + g dzdx + h dxdy = \int_U (f.A + g.B + h.C)\ d(u, v),$$

trong đó $(A, B, C) = X_u \times X_v$.

Ví dụ 7.3.2. Tính tích phân $I = \int_S ydydz - xdzdx + z^2 dxdy$, với S là mặt paraboloid

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 :\ z = x^2 + y^2,\ 0 \le z \le 1\}.$$

Lời giải: Phương trình tham số của mặt paraboloid là $X = X(x, y)$ với

$$x = x,\ y = y,\ z = x^2 + y^2, \quad (x, y) \in U = \{x^2 + y^2 \le 1\}.$$

Ta có $X_x = (1, 0, 2x)$ và $X_y = (0, 1, 2y)$ nên $X_x \times X_y = (-2x, -2y, 1)$.

Từ đây suy ra

$$I = \int_U \left[y(-2x) - x(-2y) + (x^2 + y^2)^2\right] d(x, y) = \int_U (x^2 + y^2)^2 d(x, y).$$

Đổi biến trong tọa độ cực, ta được

$$I = \int_0^1 dr \int_0^{2\pi} r^5 d\varphi = \frac{\pi}{3}. \qquad \square$$

7.3.4 Định lý Gauss - Ostrogradski

Định lý dưới đây cho một công thức liên hệ giữa tích phân mặt loại II với tích phân bội ba.

Định lý 7.3.3. *Cho S là mặt cong trơn, kín, giới hạn miền D bị chặn trong $\mathbb{R}^3$ và được định hướng ra ngoài. Giả sử các hàm ba biến $f, g, h : S \to \mathbb{R}$ có các đạo hàm riêng liên tục trên D. Khi đó, ta có:*

$$\int_S f dydz + gdzdx + hdxdy = \int_D \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial z} \right) d(x, y, z).$$

Ví dụ 7.3.4. Tính $I = \displaystyle\int_S xdydz + ydzdx + zdxdy$ biết S là mặt cầu đơn vị, hướng ra ngoài.

Lời giải: Gọi D là hình cầu đơn vị giới hạn bởi mặt S. Áp dụng công thức Gauss - Ostrogradski, ta có

$$I = \int_D (1 + 1 + 1) d(x, y, z) = 3V(D) = 4\pi. \qquad \square$$

7.3.5 Định lý Stokes

Định lý Stokes dưới đây là một mở rộng của định lý Green.

Định lý 7.3.5. *Cho S là mặt cong S trơn và đơn, bao bởi đường cong C kín, đơn đã được định hướng. Giả sử các hàm P, Q, R là hàm thực ba biến xác định và có các đạo hàm riêng liên tục trên S. Khi đó, ta có:*

$$\int_C P dx + Q dy + R dz = \int_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy + \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dydz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dzdx.$$

BÀI TẬP CHƯƠNG 7

Mục tiêu cơ bản của Chương 7:

- Giải thích được cách xây dựng định nghĩa tích phân mặt loại I và tích phân mặt loại II
- Vận dụng được các phương pháp tính tích phân mặt loại I và tích phân mặt loại II.

Tính các tích phân mặt sau.

1. $I = \int_S (x+y+z)dS$, trong đó S là nửa mặt cầu $x^2+y^2+z^2 = a^2,\ z \geq 0$.
2. $I = \int_S (x^2+y^2)dS$, trong đó S là biên của hình nón $\sqrt{x^2+y^2} \leq z \leq 1$.
3. $I = \int_S (y-z)dydz + (z-x)dzdx + (x-y)dxdy$, trong đó S là phía ngoài của mặt nón $x^2+y^2 = z^2,\ 0 \leq z \leq h$, với $h > 0$.
4. $I = \int_S x^2dydz + y^2dzdx + z^2dxdy$, trong đó S là phía ngoài của mặt cầu
$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2.$$
5. $I = \int_S xdydz + ydzdx + zdxdy$, trong đó S là mặt ngoài của hình trụ $x^2+y^2 = 4,\ -2 \leq z \leq 2$, không kể hai đáy.
6. $I = \int_S xzdydz + x^2ydzdx + y^2zdxdy$, trong đó S là mặt ngoài của vật thể giới hạn bởi $x^2+y^2 = 1,\ z = 0,\ z = 2$.
7. $I = \int_S 2dxdy - x^2zdydz + ydzdx$, trong đó S là phía ngoài mặt $4x^2 + y^2 + 4z^2 = 4$ trong góc phần tám thứ nhất (nghĩa là $x, y, z \geq 0$).

ĐỀ THI NĂM 2017

Thời gian: 120 phút

Bài 1 (2.5đ). Cho $p > 0$ và hàm số

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - y^3}{(x^2+y^2)^p}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

a) Với $p = 1$, xét tính khả vi của hàm f tại $(0,0)$.

b) Tìm tất cả các giá trị của p để hàm f khả vi tại $(0,0)$.

c) Cho $p = 1$ và $u = (a,b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Tính đạo hàm theo hướng $D_u f(0,0)$.

Bài 2 (1.5đ). Khảo sát cực trị địa phương của hàm

$$f(x,y,z) = x^3 + y^2 + 2z^2 + xy - 2xz + 3y - 1.$$

Bài 3 (1đ). Xét hàm số f xác định trên $\mathbb{R}^2$ cho bởi

$$f(x,y) = \begin{cases} 0, & (x,y) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}, \\ 1, & x \in \mathbb{Q}^c \text{ hoặc } y \in \mathbb{Q}^c. \end{cases}$$

Hàm f có khả tích trên hộp đóng $B = [0,1]\times[0,1]$ không? Tính $\displaystyle\int_B f(x,y)d(x,y)$ nếu f khả tích.

Bài 4 (1đ). Tính tích phân $I = \displaystyle\int_0^2 dx \int_0^{\sqrt{4-x^2}} e^{x^2+y^2} dy.$

Bài 5 (1đ). Tính tích phân

$$I = \int_C e^{x-y}\left[(1+x+y)dx + (1-x-y)dy\right],$$

trong đó C là nửa đường tròn đơn vị $x^2 + y^2 = 1$ nằm bên phải trục tung, đi từ $A(0,-1)$ đến $B(0,1)$.

Bài 6 (1đ). Tính tích phân

$$I = \int_S z^3 dxdy + x^3 dydz + y^3 dzdx,$$

trong đó S là phía ngoài của mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = 9$.

Bài 7 (2đ). Cho hàm $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ có các đạo hàm riêng bị chặn.

a) Chứng minh hàm f liên tục trên $\mathbb{R}^3$.

b) Với mỗi $r > 0$, ký hiệu B_r là quả cầu có tâm gốc tọa độ và bán kính r trong $\mathbb{R}^3$.

Tính giới hạn $\lim\limits_{r \to 0^+} \dfrac{1}{r^3} \displaystyle\int_{B_r} f(x)\, dx$.

Hết.

Lưu ý: *Sinh viên không được sử dụng tài liệu. Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.*

ĐỀ THI NĂM 2018

Thời gian: 90 phút

Bài 1 (2đ). Cho hàm số

$$f(x,y) = \begin{cases} (x-y)^2 \sin \dfrac{1}{x-y}, & x \neq y, \\ 0, & x = y. \end{cases}$$

a) Xét tính khả vi của hàm f tại $(0,0)$.

b) Xét tính liên tục của các đạo hàm riêng của f tại $(0,0)$.

Bài 2 (1đ). Khảo sát cực trị địa phương của hàm số

$$f(x,y) = (x-y)(2-xy).$$

Bài 3 (1đ). Tính diện tích miền giới hạn bởi các đường cong:

$$xy = 1,\ xy = 8,\ y^2 = x,\ y^2 = 8x.$$

Bài 4 (1đ). Tính tích phân

$$I = \int_D (x^2+y^2+z^2)d(x,y,z),$$

trong đó D là miền giới hạn bởi hai mặt $z = \sqrt{x^2+y^2}$ và $z = x^2+y^2$.

Bài 5 (1đ). Tính tích phân

$$I = \int_C \left(xy^4 - x^2y - x + y\right) dx + \left(xy^2 + x + \sqrt{y+1} + 2x^2y^3\right) dy,$$

trong đó C là nửa đường tròn $x^2+y^2 = 2y$ nằm bên phải trục tung, đi từ $O(0,0)$ đến $A(0,2)$.

Bài 6 (1đ). Tính tích phân

$$I = \int_S 3zdxdy + x^3dydz + y^3dzdx,$$

trong đó S là phía ngoài của mặt cầu $x^2+y^2+z^2 = 1$.

Bài 7 (2đ + 1đ). Cho D mở trong $\mathbb{R}^2$, $(x_0, y_0) \in D$ và hàm f xác định trên D. Chứng minh hai mệnh đề sau:

a) Nếu các đạo hàm riêng cấp hai của hàm f tồn tại trên D và liên tục tại (x_0, y_0) thì

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0).$$

b) Nếu $\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}, \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ tồn tại trên D và $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ liên tục tại (x_0, y_0) thì $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0)$ tồn tại và

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0).$$

Hết.

Lưu ý: *Sinh viên không được sử dụng tài liệu. Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.*

ĐỀ THI NĂM 2019

Thời gian: 90 phút

Bài 1 (1.5đ). Cho tập U mở trong $\mathbb{R}^n$ và $f: U \to \mathbb{R}$. Chứng minh rằng nếu f khả vi tại $x \in U$ thì f có đạo hàm theo mọi hướng tại x. Cho ví dụ chỉ ra chiều ngược lại có thể không đúng.

Bài 2 (1.5đ). Cho tập D mở trong $\mathbb{R}^2$ và $f: D \to \mathbb{R}$ có các đạo hàm riêng $\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}$ trên D. Giả sử $\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}$ liên tục tại $(x_0, y_0) \in D$. Chứng minh rằng f khả vi tại (x_0, y_0).

Bài 3 (1.5đ). Cho $a > 0$ và hàm hai biến

$$f(x,y) = \begin{cases} \cos x + \dfrac{\sin^2(x-y)}{(x^2+y^2)^a}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 1, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Tìm tất cả các giá trị của tham số a để hàm f khả vi tại $(0,0)$.

Bài 4 (1.5đ). Khảo sát cực trị địa phương của hàm hai biến

$$f(x,y) = x^4 + y^4 - (x-y)^2.$$

Bài 5 (1.5đ). Cho C là đường tròn $x^2 + y^2 = 2x$. Tính tích phân

$$I = \oint_C \left(x^3 - x + xe^{xy}\right) dy - \left(y^3 + x^2 \cos y - ye^{xy}\right) dx.$$

Bài 6 (1.5đ). Tính tích phân

$$I = \int_S z dx dy - x^2 dy dz + y^2 dz dx,$$

trong đó S là phía ngoài của phần mặt nón $z = \sqrt{x^2+y^2}$, $1 \leq z \leq 2$ (mặt S không kể hai đáy $z = 1$ và $z = 2$).

Bài 7 (1đ). Cho màng mỏng L (có thể xem vật thể hai chiều) ứng với miền $D \subset \mathbb{R}^2$. Nếu màng L có hàm mật độ $\rho : \ D \to \mathbb{R}$ là hàm khả tích, thì khối lượng m và trọng tâm $(\bar{x}, \bar{y})$ của màng L tương ứng được tính bởi công thức

$$m = \int_D \rho(x,y)d(x,y),$$

$$\bar{x} = \frac{1}{m}\int_D x\rho(x,y)d(x,y),$$

$$\bar{y} = \frac{1}{m}\int_D y\rho(x,y)d(x,y).$$

Tìm trọng tâm của màng L ứng với miền D là nửa hình tròn $x^2 + y^2 \leq 4,\ y \geq 0$, biết rằng hàm mật độ tại mỗi điểm trên D tỉ lệ thuận với khoảng cách từ gốc tọa độ đến điểm đó.

Hết.

Lưu ý: *Sinh viên không được sử dụng tài liệu. Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.*

ĐỀ THI NĂM 2020

Thời gian: 90 phút

Bài 1 (4đ). Cho tập U mở trong $\mathbb{R}^n$ và hàm $f: U \to \mathbb{R}$.

a) Phát biểu định nghĩa về sự khả vi của hàm f tại $x \in U$. Chứng minh rằng nếu f khả vi tại $x \in U$ thì f có các đạo hàm riêng tại x và

$$\nabla f(x) = f'(x).$$

b) Mệnh đề ngược lại ở câu a) có đúng không? Giải thích câu trả lời.

c) Khảo sát sự khả vi của f tại $(0,0)$, trong đó hàm f xác định bởi

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy\left(\sqrt[3]{\cos(xy)} - 1\right)}{x^6 + |y|}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Bài 2 (3.5đ). Cho D là tập mở, liên thông và đơn liên trong $\mathbb{R}^2$. Giả sử hai hàm P, $Q: D \to \mathbb{R}$ có các đạo hàm riêng liên tục trên D và thỏa mãn điều kiện

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} \quad \text{trên } D.$$

a) Cho hai điểm A, B cố định nằm trong D. Chứng minh rằng tích phân

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

không phụ thuộc vào đường nối A, B với mọi cung $\overset{\frown}{AB}$ trơn từng khúc nằm trong D.

b) Chứng minh tồn tại hàm $U: D \to \mathbb{R}$ có các đạo hàm riêng cấp 2 liên tục sao cho

$$\frac{\partial U}{\partial x} = P \quad \text{và} \quad \frac{\partial U}{\partial y} = Q \quad \text{trên } D.$$

c) Tính tích phân đường sau đây

$$I = \int_C \left(x + \frac{x}{x^2+y^2}\right) dy - \frac{y}{x^2+y^2} dx,$$

trong đó C là đường cong có phương trình tham số

$$X(t) = \left(1 + \cos^3 t,\ 2\sin^2 \frac{t}{2}\right)$$

đi từ $A = X(0)$ đến $B = X(\pi)$.

Bài 3 (1.5đ). Tính tích phân

$$I = \int_S (xy + z)dxdy - x^3 ydydz + (y^2 - z^3)dzdx,$$

trong đó S là phía ngoài của phần mặt nón $z = x^2 + y^2$, $0 \leq z \leq 1$ (mặt S không kể mặt $z = 1$).

Bài 4 (1đ). Khảo sát cực trị địa phương của hàm hai biến

$$f(x, y) = xy(2x - y - 1).$$

Hết.

Lưu ý: *Sinh viên không được sử dụng tài liệu. Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.*

ĐỀ THI NĂM 2021

Thời gian: 90 phút

Bài 1 (3đ). a) Cho ví dụ một hàm $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ sao cho f liên tục và có đạo hàm theo mọi hướng tại $(0, 0, 0)$ nhưng không khả vi tại đó. (1.5đ)

b) Khảo sát sự khả vi của hàm f tại $(0, 0)$, với f xác định bởi (1.5đ)

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 \sin y}{\sqrt{x^4 + 2y^2}}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Bài 2 (2.5đ). a) Cho $D \subset \mathbb{R}^2$ là miền bị chặn và hàm $f : D \to \mathbb{R}$ liên tục trên D. Giả sử D đối xứng qua trục Ox và f thỏa mãn tính chất

$$f(x, -y) = -f(x, y), \qquad \forall (x, y) \in D.$$

Bằng phương pháp đổi biến, chứng minh rằng $\displaystyle\int_D f(x, y)d(x, y) = 0$. (1.0đ)

b) Áp dụng câu a) để tính tích phân

$$I = \int_D \left(\sqrt{x^2 + y^2} - x^4 y^3 \sin x \sqrt{2x - x^2 - y^2} \right) d(x, y),$$

miền D xác định bởi $D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - 1)^2 + y^2 \leq 1 \right\}$. (1.5đ)

Bài 3 (2.5đ). Tính các tích phân sau:

a) $T = \displaystyle\int_{-2}^{2} dx \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} (2 - \sqrt{x^2 + y^2})(x^2 + y^2)dy.$ (1.0đ)

b) $K = \displaystyle\int_C \left(x + 2y\sqrt{y^2 + 1} \right) dy + (e^x \sin x - y)\, dx$, trong đó C là đường cong có phương trình tham số

$$X(t) = (1 + \cos t,\ 1 - \sin t)$$

theo hướng từ $t = 0$ đến $t = \dfrac{\pi}{2}$. (1.5đ)

Bài 4 (2đ). Cho tham số $a > 0$ và hàm $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$|f(x,y)| \leq \left(x^2+y^2\right)^a, \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

a) Chứng minh rằng nếu $a > \dfrac{1}{2}$ thì hàm f luôn khả vi tại $(0,0)$. (1.0đ)

b) Giả sử $a \leq \dfrac{1}{2}$, cho ví dụ hàm f thỏa mãn giả thiết nhưng không khả vi tại $(0,0)$. (1.0đ)

Hết./.

Lưu ý: - *Sinh viên được sử dụng tài liệu khi làm bài.*
- *Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.*

ĐỀ THI NĂM 2022

Thời gian: 90 phút

Bài 1 (2.5đ). Cho hàm $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ có các đạo hàm riêng trên $\mathbb{R}^2$. Chứng minh:

a) Nếu các đạo hàm riêng của f bị chặn trên $\mathbb{R}^2$ thì f liên tục trên $\mathbb{R}^2$. (1.0đ)

b) Nếu các đạo hàm riêng của f liên tục trên $\mathbb{R}^2$ thì f khả vi trên $\mathbb{R}^2$. (1.5đ)

Bài 2 (2.5đ). Cho hàm $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ xác định bởi

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x^3 - y^4)}{\sqrt{x^2 + 2y^2}}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

a) Khảo sát sự khả vi của hàm f trên $\mathbb{R}^2$. (1.5đ)

b) Xét tính liên tục của các đạo hàm riêng của f tại $(0,0)$. (1.0đ)

Bài 3 (3.0đ). Cho miền D xác định bởi

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + y^2 \leq 4y\right\}$$

và C là đường cong dọc theo biên của miền D, đi từ điểm $O(0,0)$ đến $A(2,2)$ theo hướng ngược chiều kim đồng hồ.

Tính các tích phân sau:

a) $I = \displaystyle\int_D \left(\sqrt{x^2 + y^2} - y\sqrt{4y - x^2 - y^2}\right) d(x,y)$. (1.5đ)

b) $K = \displaystyle\int_C \left(x^2 + y + xe^{xy}\right) dy + \left(ye^{xy} - xy^2\right) dx$. (1.5đ)

Bài 4 (2.0đ). Cho $D_{uv} \subset \mathbb{R}^2$ là miền hình tam giác với tọa độ các đỉnh lần lượt là $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$ và miền D xác định bởi

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ 0 \leq x \leq 1, \ 0 \leq y \leq 2\sqrt{1-x}\right\}.$$

a) Chứng minh rằng hệ phương trình sau xác định một phép đổi biến từ D_{uv} vào D: (1.0đ)

$$\begin{cases} x = u^2 - v^2 \\ y = 2uv \end{cases}.$$

b) Áp dụng câu a) để tính tích phân $T = \int_D \sqrt{x^2 + y^2} d(x, y)$. (1.0đ)

Hết./.

Lưu ý: - *Sinh viên được sử dụng tài liệu khi làm bài.*
- *Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.*

Tài liệu tham khảo

[1] Đỗ Công Khanh, *Toán học cao cấp 3*, NXB ĐHQG TP.HCM, 2005.

[2] Lê Hoàn Hóa, *Phép tính vi phân trên không gian hữu hạn chiều*, Trường ĐH Sư phạm TPHCM, Tài liệu lưu hành nội bộ, 2005.

[3] Nguyễn Duy Tiến, *Bài giảng giải tích, tập I*, NXB ĐHQG Hà Nội, 2004.

[4] James Stewart, *Calculus*, Seventh Edition, 2012.

[5] George B. Thomas, Maurice D. Weir, Joel R. Hass, *Thomas' Calculus: Early Transcendentals*, 12th Edition, 2010.

[6] William F. Trench, *Introduction to real analysis*, Hyperlinked Edition 2.03, 2012.